Exame de Matemática Computacional

(Eng. Informática)

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

19 de Junho de 2000 ——- Duração: 2h 30min

1. Considere a equação unidimensional $f(x) = \sin x - \cos 2x = 0, x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine um intervalo $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$ que contenha uma única raiz x^* de f.

   (b) Mostre que f é contínua à Lipschitz em $[a, b]$ e que $f'(x^*) \neq 0$.

   (c) Apresente a relação recursiva do método de Newton que define uma sucessão $\{x_k\}$ que se espera vir a convergir para x^*. Convergência para x^* está sempre assegurada? Se houver de facto convergência para x^*, será a taxa de convergência quadrática? Que quer isso dizer?

   Nota: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2. Considere uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = (x_1 - x_2)^4 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1.$$

   (a) Determine o vector gradiente ∇f e matriz Hessiana $\nabla^2 f$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Mostre que f não é convexa em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Determine todos os pontos estacionários de f. Quais satisfazem a condição suficiente de segunda ordem para mínimo local?

3. Considere a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $f(z) = \Re(z^3 - 2z - 5)$, onde $\Re(\cdot)$ designa a parte real de um número complexo. Pretende-se determinar $z = x_1 + x_2 i (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ que torne mínimo o valor de f.

   (a) Mostre que o problema dado é equivalente ao problema de determinar o mínimo global $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ de uma certa função $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (b) Obtenha uma aproximação x^1 de x^* efectuando uma iteração do método de Newton a partir de $x^0 = (-1, 1)$.

   (c) Obtenha uma aproximação x^2 de x^* efectuando uma iteração do método de Broyden a partir de x^1 e x^0 que vêm da alínea anterior.

   Nota: Para resolver (b) e (c) sem ter resolvido (a) considere que $g(x) = x_1^2 x_2 - x_2^2/2$.

(v.s.f.f.)

4. A função $y(x) = \tan x$ é uma função contínua no intervalo $[0.3, 0.4]$ no qual são conhecidos os seguintes valores tabelados:

x_i	$y(x_i)$
0.3	0.309
0.4	0.423
0.5	0.546

Use interpolação inversa para calcular um valor x tal que $\tan x = 0.4$ e estabeleça um majorante para o erro cometido.

5. Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} y' = 1/(1+y^2), & t \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

cuja solução exacta está definida implicitamente por $y^3 + 3y - 3t = 4$.

(a) Mostre que o PVI é bem posto.

(b) Aproxime $y(1)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 2, com $h = 0.5$.

(c) Aproxime $y(1)$ efectuando duas iterações do método da bissecção. Quantas iterações seriam necessárias para obter um erro absoluto inferior a 0.01?