Matemática Computacional		19 de Fevereiro de 2002
	f1ex18	
Professor: João Soares		*Aluno: Harry Potter*

a. As raízes de $f(x) = \sin x - \cos 3x$ são os pontos x para os quais as funções $\sin x$ e $\cos 3x$ coincidem. No intervalo $[0, \pi/4]$, a função $\sin x$ é crescente e a função $\cos 3x$ é decrescente. Como a monotonia de ambas é estrita e $f(0)f(\pi/4) < 0$, existe uma única raiz de f em $[0, \pi/4]$, denotada x^*.

b. A função f' é contínua à Lipschitz em $[0, \pi/4]$ se existir um escalar γ tal que

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \gamma |x - y|, \text{ para todo } x, y \in [0, \pi/4].$$

Como $f'(x) = \cos x + 3\sin(3x)$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ então podemos aplicar o teorema do valor médio. Assim, para cada $x, y \in [0, \pi/4]$

$$f'(x) - f'(y) = f''(z)(x - y)$$

para algum z entre x e y (<u>Nota</u>: z depende de x e de y). Se escolhermos

$$\gamma \geq \max_{z \in [0,\pi/4]} |f''(z)| = \max_{z \in [0,\pi/4]} |-\sin z + 9\cos(3z)|,$$

$\gamma = 10$, por exemplo, então tem-se

$$|f'(x) - f'(y)| = |f''(z)|\ |x - y| \leq \gamma\ |x - y|, \text{ para todo } x, y \in [0, \pi/4],$$

pelo que se conclui a continuidade à Lipschitz de f' em $[0, \pi/4]$.

Mais, $f'(x^*) \neq 0$ porque $f'(x) = \cos x + 3\sin 3x > 0$, para todo $x \in]0, \pi/4[$, e f' não se anula em 0 e $\pi/4$.

c. A relação recursiva do método de Newton que define uma sucessão $\{x_k\}$ que se espera vir a convergir para x^* é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x_k - \cos 3x_k}{\cos x_k + 3\sin 3x_k}$$

Em geral, não é possível assegurar antecipadamente a convergência da sucessão $\{x_k\}$ para x^*. O teorema da convergência local do método de Newton define uma condição suficiente para assegurar essa convergência: f' contínua à Lipschitz num intervalo fechado que contenha x^*, $f'(x^*) \neq 0$, e o ponto inicial x_0 escolhido suficientemente próximo de x^*. Nessas condições o teorema garante ainda uma taxa de convergência quadrática para x^*.

No caso de se saber que a sucessão $\{x_k\}$ converge para x^* então a partir de certa ordem um dos termos da sucessão $\{x_k\}$ estará suficientemente próximo de x^*. Esse termo desempenhará o papel de x^0 no teorema que enunciámos no parágrafo anterior. Como vimos na alínea b, f' é contínua à Lipschitz num intervalo fechado que contém x^* e $f'(x^*) \neq 0$.

Estando nas condições do teorema da convergência local do método de Newton podemos então afirmar que a sucessão $\{x_k\}$ converge para x^* com taxa de convergência quadrática.

Convergência quadrática significa que existe um escalar c tal que

$$|x_{k+1} - x_*| \leq c|x_k - x_*|^2, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$