

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Exame — 03/01/01

Licenciaturas em Bioquímica (opção), Química e Química Industrial e em Engenharias Geológica, Minas e Química

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Considere as matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

- Classifique as matrizes B e C .
- Calcule o produto BC , sem efectuar quaisquer cálculos, e através de dois raciocínios diferentes.
- Determine os valores próprios de B e de C .
- A matriz B é diagonalizável?

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Calcule o produto Ay .
- Com base na alínea anterior, classifique o sistema de equações lineares $Ax = b$ em que

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$, classificando-o.
- Determine uma base para o espaço nulo de A .
- Será possível escrever o vector y como combinação linear dos elementos da base determinada na alínea (d)?
- Qual é a característica da matriz A ? E a nulidade?
- Escreva a factorização $PA = LU$ da matriz A .

v.s.f.f.

3. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras e indique um contra-exemplo para cada uma das afirmações falsas. (n e m designam números inteiros positivos.)
- (a) Toda a matriz (quadrada) diagonalizável é invertível.
 - (b) Toda a matriz em escada em que o número de *pivots* é igual ao número de colunas é não singular.
 - (c) (Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ com $m < n$.) A dimensão do espaço das linhas é menor do que a dimensão do espaço das colunas.
 - (d) Se $Q \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, então o produto interno entre Qx e Qy é igual quaisquer que sejam x e y em \mathbb{R}^n .
 - (e) Um hiperplano em \mathbb{R}^3 é um subespaço de dimensão 2.