Álgebra Linear e Geometria Analítica — Exame — 14/01/02

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h30m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 2 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

em que a_{21}, a_{23} e a_{32} designam números reais.

   (a) Indique, se for possível, valores reais para a_{21}, a_{23} e a_{32} de forma a que a matriz A:

      i. tenha característica 1;

      ii. faça com que o correspondente sistema homogéneo tenha uma incógnita livre;

      iii. torne possíveis e determinados todos os sistemas de equações lineares da forma $Ax = b$ para todos os vectores b em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Faça $a_{21} = 0$ e $a_{23} = a_{32} = 1$ e calcule a decomposição $A = LDL^\top$ da matriz A.

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados deste sistema.

   (b) Com base no cálculo feito na alínea anterior, determine e represente geometricamente a recta de regressão linear correspondente aos pontos

$$(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0), \quad (\alpha_2, \beta_2) = (1, 1) \quad \text{e} \quad (\alpha_3, \beta_3) = (2, 0).$$

v.s.f.f.

3. Sejam u e v dois vectores ortogonais de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que

   $$\langle u, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \|u\|^2 \quad \text{e} \quad \langle v, \alpha u + \beta v \rangle = \beta \|v\|^2,$$

   em que α e β representam números reais.

   (b) Suponha agora que os vectores u e v são ortogonais e não nulos. Mostre, recorrendo aos resultados da alínea anterior, que u e v são linearmente independentes.

4. Considere a matriz

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $A + I_3$ e, com base neste cálculo, indique um valor próprio de A.

   (b) Determine todos os valores próprios de A.

   (c) Calcule os espaços próprios associados aos valores próprios de A. (Nota: os valores próprios, considerados sem repetições, são -1 e 2.)

   (d) Diga se A é diagonalizável e indique uma matriz diagonalizante.