

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Exame — 29/01/01

Licenciaturas em Bioquímica (opção), Química e Química Industrial e em Engenharias Geológica, Minas e Química

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $A = LU$ em que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule a inversa de L através do Algoritmo de Gauss-Jordan.
- (b) Escreva U na forma $DE_{23}(1)$, em que D é uma matriz diagonal.
- (c) Com base no resultado da alínea anterior calcule a inversa de U .
- (d) Sabendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ em que $b = [1 \ 0 \ 2]^T$, através da resolução de apenas um sistema de equações lineares com uma matriz triangular superior.

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Classifique o sistema de equações lineares $Ax = b$.
- (b) Determine uma base ortogonal para o espaço das colunas de A .
- (c) Sem efectuar quaisquer cálculos, diga qual é a característica de $A^T A$. Classifique o sistema de equações lineares em que a matriz é $A^T A$ e o termo independente é $A^T b$.
- (d) Verifique que $\bar{x} = [-3 \ -1/2 \ 0]^T$ é uma solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$.
- (e) Qual é o ângulo que fazem os vectores $[2 \ 1 \ 2]^T$ e $b - A\bar{x}$? Porquê? Faça os cálculos e confirme o resultado.

v.s.f.f.

3. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras e indique um contra-exemplo para cada uma das afirmações falsas. (n designa um número inteiro positivo.)
- (a) Toda a matriz simétrica é diagonalizável.
 - (b) Se $AB = \mathbf{0}$, com $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, então ou A tem uma linha de zeros ou B tem uma coluna de zeros.
 - (c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é singular, então A não tem valores próprios reais.
 - (d) Se três vectores de \mathbb{R}^n são linearmente dependentes, então ou um deles é o vector nulo ou dois deles são linearmente dependentes.
 - (e) Uma recta em \mathbb{R}^3 , $S_1 = \{p_1\} + F_1$, e um plano em \mathbb{R}^3 , $S_2 = \{p_2\} + F_2$, são paralelos se $F_2 \subset F_1$.