Álgebra Linear e Geometria Analítica — Exame — 13/02/02

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h15m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Considere a igualdade
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$
Com base nesta igualdade e sem fazer quaisquer cálculos adicionais:
   (a) indique as matrizes P, L e U de uma decomposição $PA = LU$;
   (b) indique bases para os espaços das linhas e das colunas de A.

2. Seja
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
em que a_{11} e a_{31} designam números complexos.
   (a) Indique, se for possível, valores complexos para a_{11} e a_{31} de forma a que a matriz A seja:
      i. invertível, com elementos todos reais;
      ii. hermítica, com pelo menos um elemento complexo não real.
   (b) Faça $a_{11} = 0$ e $a_{31} = 2$ e diga por que é que obtém uma matriz diagonalizável. Calcule, depois, os seus valores próprios.

v.s.f.f.

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $b \in C(A)$.

   (b) Sem efectuar quaisquer cálculos diga por que é que o vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz $A^\top A\bar{x} = A^\top b$ também satisfaz $A\bar{x} = b$.

   (c) Determine uma base ortonormada de $C(A)$.

4. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ com elementos reais, em que m e n são números inteiros positivos. Sejam x e y dois vectores de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Escreva $A(x - y)$ como combinação linear das colunas de A.

   (b) Que relação existe entre x e y quando $nul(A) = 0$ e $Ax = Ay$?