Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2000/01 Folha 0

O Conjunto dos Números Complexos

1. Escreva na forma algébrica:

   (a) $(3-2i)(4+5i)+(3-2i)(4-5i)$; (b) $(2-i)(4+3i)(5+2i)$; (c) $\frac{3-2i}{4+3i}$;

   (d) $\frac{2-2i}{7+i}+\frac{3+4i}{2-3i}$; (e) $i^4-3i^3+4i^2+2i-6$; (f) $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^4$;

   (g) $\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)(1+2i)}+\frac{1+i}{1-i}$; (h) $\frac{4+i}{4-i}+\frac{4-i}{4+i}$; (i) $\frac{3+2i}{(2+i)(3-2i)}$;

   (j) $\sum_{k=0}^{100} i^k$; (k) $(1-3i)^{-2}$; (l) i^{2000}.

2. Determine $z \in \mathbb{C}$ que torna $(6-i)z$ um número real e $6-i+z$ um imaginário puro.

3. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

   (a) $\overline{\overline{z}}=z$; (b) $|\overline{z}|=|z|$; (c) $|-z|=|z|$;

   (d) $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,(z)$; (e) $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}\,(z)$; (f) $z\overline{z}=|z|^2$;

   (g) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$; (h) $\overline{-z}=-\overline{z}$; (i) $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$;

   (j) $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$; (k) $|z.w|=|z|.|w|$; (l) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$.

4. Mostre que $\overline{[\frac{(3+7i)^2}{8+6i}]}=\frac{(3-7i)^2}{8-6i}$.

5. Mostre que, se um número complexo λ for raiz de um polinómio $p(z)$ com coeficientes reais, então $\overline{\lambda}$ também é raiz de $p(z)$.

6. Escreva os seguintes polinómios como produtos de factores de grau 1:

   (a) z^2+1; (b) z^4-1; (c) z^2-2z+5.

7. Encontre dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 9.

8. Demonstre as seguintes propriedades do módulo de números complexos:

   (a) $|z+w|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2$; (b) $|z-w|^2=|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2$;

   (c) $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$; (d) $\mathrm{Re}(z)\leq|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$;

   (e) $\mathrm{Im}(z)\leq|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$; (f) $|z+w|\leq|z|+|w|$;

   (g) $||z|-|w||\leq|z-w|$.

9. Represente na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

(a) -5; (b) $5i$; (c) $-2-2i$;

(d) $1+\sqrt{3}i$; (e) $3\sqrt{3}+3i$; (f) $(1-i)(-1+\sqrt{3}i)$;

(g) $-1-i$; (h) $\sqrt{3}/2-i/2$; (i) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

10. Escreva $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{20}$ na forma algébrica.

11. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = cis(n\frac{\pi}{2})$.

12. Determine e represente geometricamente:

(a) as raízes cúbicas de 1; (b) as raízes cúbicas de -1;

(c) as raízes quadradas de i; (d) as raízes quartas de -1;

(e) as raízes quartas de $2i$; (f) as raízes de índice n de 1.

13. Determine as raízes cúbicas de $-\frac{8}{\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{2}}\,i$ e represente-as geometricamente.

14. Determine as quatro raízes da equação $z^4+4=0$ e use-as para escrever o polinómio z^4+4 como produto de factores de grau 2 com coeficientes reais.

15. Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

(a) $z^2=-1$; (b) $z^3=1+i$; (c) $z^6=i+1$;

(d) $z^4-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=0$; (e) $(z+3i)^6=i+1$; (f) $z^4-1=0$;

(g) $z^2+2z+2=0$; (h) $4z^3+13z+17=0$; (i) $z^2+iz+2=0$.

16. Considere a circunferência de centro na origem das coordenadas e raio 1. Determine os vértices do hexágono regular inscrito nessa circunferência e que contém como vértice o ponto $(1,0)$.

17. Identifique no plano complexo as regiões definidas pelas seguintes condições:

(a) $|z-1|=1$ e $|z-i|\leq 1$; (b) $|z-2|=|z-3i|\leq 2$;

(c) $\left|\frac{z}{z+1}\right|\leq 2$; (d) $\left|\frac{1}{z}\right|\leq 2$;

(e) $\mathrm{Re}\,(z-iz)\geq 2$; (f) $|5z-5+10i|<5$ e $\left|\frac{4}{z}\right|<2$.