

149. (a) Demonstre que dois planos $S_1 = \{p_1\} + F_1$ e $S_2 = \{p_2\} + F_2$ coincidem se e só se $F_1 = F_2$ e $p_1 - p_2 \in F_1$.
- (b) Conclua da alínea anterior que o subespaço director de um plano é único.
- (c) Conclua ainda que qualquer vector de um plano serve como vector de translação.
150. Seja $S = \{p\} + F$ um plano.
- (a) Prove que, se dois vectores u e v pertencem a S , então $u - v \in F$.
- (b) Prove que, reciprocamente, se $u \in S$ e $u - v \in F$, então $v \in S$.
151. Prove que um plano $S = \{p\} + F$ é um subespaço se e só se $p \in F$.
152. (a) O que é um plano de dimensão 0?
- (b) O que é um plano de dimensão n em \mathbb{R}^n ?
153. Sejam $S_1 = \{p_1\} + F_1$ e $S_2 = \{p_2\} + F_2$ dois planos de \mathbb{R}^n .
- (a) Prove que, se a intersecção de S_1 com S_2 não for vazia, então é um plano de subespaço director $F_1 \cap F_2$.
- (b) Prove que, se S_1 tiver dimensão k e S_2 tiver dimensão h , e se $k + h > n$, então $S_1 \cap S_2$, se não for vazia, tem dimensão maior ou igual a $k + h - n$. (Recorde o exercício 144.) Interprete os resultados em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{R}^4 .
154. Prove que a intersecção de um plano $S = \{p\} + F$ com um subespaço suplementar de F se reduz a um vector. Interprete este resultado para planos em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 .
155. Prove que se uma recta tem dois vectores em comum com um plano, então está contida nele.
156. Diga se os vectores $a = (1, 6, 4, 4, -2)$ e $b = (1, 6, 5, 4, -2)$ pertencem ao plano em \mathbb{R}^5 de equação $x = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, onde $p = (2, 3, -1, 1, 1)$, $v_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$.
157. Para cada uma das seguintes rectas em \mathbb{R}^4 , determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1, 0, 0, 1)$ e é paralelo aos vectores $(5, 2, -3, 1)$, $(4, 1, -1, 0)$ e $(-1, 2, -5, 3)$:
- (a) $x = (3, 1, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (b) $x = (3, 0, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (c) $x = (-2, 0, -1, 2) + \alpha(1, 1, -2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

158. Mostre que são concorrentes as duas rectas em \mathbb{R}^5 $\{(2, 1, 1, 3, -3)\} + \mathcal{L}\{(2, 3, 1, 1, -1)\}$ e $\{(1, 1, 2, 1, 2)\} + \mathcal{L}\{(1, 2, 1, 0, 1)\}$ e determine o seu ponto de intersecção. Indique o plano de dimensão 2 que contém estas duas rectas.
159. Mostre que não existe nenhum plano de dimensão 2 em \mathbb{R}^5 que contenha as rectas $\{(8, 2, 5, 15, -3)\} + \mathcal{L}\{(7, -4, 11, 13, -5)\}$ e $\{(-7, 2, -6, -5, 3)\} + \mathcal{L}\{(2, 9, -10, -6, 4)\}$. Indique um plano de dimensão 3 que contenha as duas rectas.
160. Escreva a equação geral (ou cartesiana) de cada um dos seguintes planos em \mathbb{R}^3 :
- O plano que contém o ponto $(1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vector $(-1, 1, 0)$.
 - O plano que contém os pontos $(2, 1, 3)$, $(-3, -1, 3)$ e $(4, 2, 3)$.
 - O plano que contém o ponto $(6, 0, -2)$ e é paralelo aos vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, -2, 1)$.
 - O plano que contém o ponto $(4, -1, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - 3y - z = 5$.
161. Calcule a distância do ponto $b = (2, 1, 0)$ ao plano de equação $x + y - z = 0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b ?
162. Considere o hiperplano em \mathbb{R}^4 $x = \{p\} + F$, onde $p = (0, 0, -3, 6)$ e F é gerado pelos vectores $(1, 0, 2, -2)$, $(0, 1, -2, 0)$ e $(2, 1, 6, -4)$.
- Determine a equação cartesiana deste hiperplano.
 - Calcule a distância de $x_0 = (5, 3, -1, -1)$ a esse hiperplano.
163. O ângulo entre dois planos $\langle u, x - p \rangle = 0$ e $\langle v, x - q \rangle = 0$ é o ângulo entre u e v (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.)
Calcule o ângulo entre os planos $x + y + 4z = 1$ e $x - 2y - 2z = 3$.
164. Determine as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $(2, -1, 4)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.
165. Determine as equações paramétricas da recta $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.
166. Calcule a distância do ponto $x_0 = (2, 0, 7)$
- à recta que passa pelo ponto $p = (0, 2, -3)$ e é paralela a $v = (2, 2, 1)$;
 - à recta de equações cartesianas $\begin{cases} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{cases}$.
167. Dadas as rectas $\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$
- verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;
 - calcule o ângulo entre elas.