Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 11

149. (a) Demonstre que dois planos $S_1 = \{p_1\} + F_1$ e $S_2 = \{p_2\} + F_2$ coincidem se e só se $F_1 = F_2$ e $p_1 - p_2 \in F_1$.
    (b) Conclua da alínea anterior que o subespaço director de um plano é único.
    (c) Conclua ainda que qualquer vector de um plano serve como vector de translação.

150. Seja $S = \{p\} + F$ um plano.
    (a) Prove que, se dois vectores u e v pertencem a S, então $u - v \in F$.
    (b) Prove que, reciprocamente, se $u \in S$ e $u - v \in F$, então $v \in S$.

151. Prove que um plano $S = \{p\} + F$ é um subespaço se e só se $p \in F$.

152. (a) O que é um plano de dimensão 0?
    (b) O que é um plano de dimensão n em $\mathbb{R}^n$?

153. Sejam $S_1 = \{p_1\} + F_1$ e $S_2 = \{p_2\} + F_2$ dois planos de $\mathbb{R}^n$.
    (a) Prove que, se a intersecção de S_1 com S_2 não for vazia, então é um plano de subespaço director $F_1 \cap F_2$.
    (b) Prove que, se S_1 tiver dimensão k e S_2 tiver dimensão h, e se $k + h > n$, então $S_1 \cap S_2$, se não for vazia, tem dimensão maior ou igual a $k + h - n$. (Recorde o exercício 144.) Interprete os resultados em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^4$.

154. Prove que a intersecção de um plano $S = \{p\} + F$ com um subespaço suplementar de F se reduz a um vector. Interprete este resultado para planos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

155. Prove que se uma recta tem dois vectores em comum com um plano, então está contida nele.

156. Diga se os vectores $a = (1, 6, 4, 4, -2)$ e $b = (1, 6, 5, 4, -2)$ pertencem ao plano em $\mathbb{R}^5$ de equação $x = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, onde $p = (2, 3, -1, 1, 1)$, $v_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$.

157. Para cada uma das seguintes rectas em $\mathbb{R}^4$, determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1, 0, 0, 1)$ e é paralelo aos vectores $(5, 2, -3, 1)$, $(4, 1, -1, 0)$ e $(-1, 2, -5, 3)$:
    (a) $x = (3, 1, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
    (b) $x = (3, 0, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
    (c) $x = (-2, 0, -1, 2) + \alpha(1, 1, -2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

158. Mostre que são concorrentes as duas rectas em $\mathbb{R}^5$ $\{(2,1,1,3,-3)\} + \mathcal{L}\{(2,3,1,1,-1)\}$ e $\{(1,1,2,1,2)\} + \mathcal{L}\{(1,2,1,0,1)\}$ e determine o seu ponto de intersecção. Indique o plano de dimensão 2 que contém estas duas rectas.

159. Mostre que não existe nenhum plano de dimensão 2 em $\mathbb{R}^5$ que contenha as rectas $\{(8,2,5,15,-3)\} + \mathcal{L}\{(7,-4,11,13,-5)\}$ e $\{(-7,2,-6,-5,3)\} + \mathcal{L}\{(2,9,-10,-6,4)\}$. Indique um plano de dimensão 3 que contenha as duas rectas.

160. Escreva a equação geral (ou cartesiana) de cada um dos seguintes planos em $\mathbb{R}^3$:

    (a) O plano que contém o ponto $(1,2,3)$ e é perpendicular ao vector $(-1,1,0)$.

    (b) O plano que contém os pontos $(2,1,3)$, $(-3,-1,3)$ e $(4,2,3)$.

    (c) O plano que contém o ponto $(6,0,-2)$ e é paralelo aos vectores $(1,0,0)$ e $(0,-2,1)$.

    (d) O plano que contém o ponto $(4,-1,2)$ e é paralelo ao plano $2x-3y-z=5$.

161. Calcule a distância do ponto $b=(2,1,0)$ ao plano de equação $x+y-z=0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b?

162. Considere o hiperplano em $\mathbb{R}^4$ $x=\{p\}+F$, onde $p=(0,0,-3,6)$ e F é gerado pelos vectores $(1,0,2,-2)$, $(0,1,-2,0)$ e $(2,1,6,-4)$.

    (a) Determine a equação cartesiana deste hiperplano.

    (b) Calcule a distância de $x_0=(5,3,-1,-1)$ a esse hiperplano.

163. O ângulo entre dois planos $\langle u, x-p\rangle = 0$ e $\langle v, x-q\rangle = 0$ é o ângulo entre u e v (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.)
Calcule o ângulo entre os planos $x+y+4z=1$ e $x-2y-2z=3$.

164. Determine as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $(2,-1,4)$ e é perpendicular ao plano $x-3y+2z=1$.

165. Determine as equações paramétricas da recta $\left\{\begin{array}{l}2x-y-3z=5\\ 2x+y=2\end{array}\right.$.

166. Calcule a distância do ponto $x_0=(2,0,7)$

    (a) à recta que passa pelo ponto $p=(0,2,-3)$ e é paralela a $v=(2,2,1)$;

    (b) à recta de equações cartesianas $\left\{\begin{array}{l}5x-2y+z=-7\\ 3x-3y+z=-4\end{array}\right.$.

167. Dadas as rectas $\left\{\begin{array}{l}x=3+\alpha\\ y=\alpha\\ z=-1-2\alpha\end{array}\right.$ e $\left\{\begin{array}{l}2x+y+3z=0\\ x+2y=6\end{array}\right.$

    (a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

    (b) calcule o ângulo entre elas.