Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2000/01 Folha 12

Valores Próprios e Vectores Próprios

168. Calcule os valores próprios e os respectivos espaços próprios de cada uma das seguintes matrizes (indicando uma base para os espaços próprios).

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

169. Sabe-se que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios. Verifique que a recíproca não é verdadeira através das matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

170. (a) Determine os valores e os vectores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Generalize para uma matriz diagonal qualquer.

171. Quais são os valores próprios de uma matriz triangular ?

172. Determine os vectores próprios das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ (estude os casos $\alpha = \beta$ e $\alpha \neq \beta$).

173. Suponhamos que A tem os valores próprios $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Prove que, então, $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ são valores próprios de A^2 e que qualquer vector próprio de A é também vector próprio de A^2. Generalize para qualquer potência de A.

174. Diga se cada uma das matrizes do exercício 168 é ou não diagonalizável, e em caso afirmativo determine uma matriz diagonalizante.

175. Uma matriz real 2×2 A tem valores próprios 3 e 5, e a eles estão associados, respectivamente, os vectores próprios $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$. Prove que A é simétrica.

176. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine um vector próprio de A, associado ao valor próprio 0, que tenha norma 1.

(c) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.

177. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.

178. Calcule $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^9$.

179. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Sem calcular os vectores próprios de A, mostre que A não é diagonalizável.