Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 1

Matrizes

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   Calcule a matriz $2(A+B) - AB$.

2. Calcule os produtos AB e BA, quando definidos, nos seguintes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

3. Considere as matrizes

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

4. Considere as matrizes

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

5. Mostre que se os produtos AB e BA estão ambos definidos e A é do tipo $m \times n$, então B é do tipo $n \times m$.

6. Calcule o número de multiplicações necessárias para multiplicar uma matriz A do tipo $m \times n$ por uma matriz B do tipo $n \times p$.

7. Sendo $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n}$ e $B = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,n}$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

   (a) escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j;

   (b) escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

8. Sejam α e β números reais, calcule o produto $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$.

9. Calcule:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$; (f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k$ $(\theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

10. Calcule:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

11. (a) Verifique que as identidades algébricas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e $(AB)^2 = A^2B^2$ nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo, as matrizes seguintes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(iii) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ 3i & 1-i \end{bmatrix}$.

(b) Transforme os segundos membros daquelas identidades de forma a obter identidades sempre válidas para A e B matrizes quadradas quaisquer da mesma ordem.

(c) Mostre que se duas matrizes A e B verificam a primeira identidade algébrica referida em (a) então A e B também verificam as outras três identidades.

12. Ache todas as matrizes permutáveis com A, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

13. Prove que uma matriz que comuta com uma matriz diagonal de elementos diagonais todos distintos tem de ser ela própria uma matriz diagonal.

14. Prove que uma matriz quadrada que comuta com todas as matrizes quadradas da mesma ordem tem que ser uma matriz escalar (isto é, da forma αI para algum número α).

15. Em cada uma das alíneas dê exemplos de matrizes reais 2×2 com a propriedade indicada:

(a) $A^2 = -I$; (b) $A^2 = 0$, sendo A não nula; (c) $AB = 0$, não tendo A nem B nenhum elemento nulo.