Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 2

16. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Prove que

(a) se A é invertível e C é uma matriz $n \times p$ tal que $AC = 0_{n\times p}$ ($0_{n\times p}$ a matriz nula $n \times p$), então $C = 0_{n\times p}$;

(b) se A é invertível e D é uma matriz $m \times n$ tal que $DA = 0_{m\times n}$, então $D = 0_{m\times n}$;

(c) se A é invertível e $AC = AD$ (C e D matrizes $n \times p$), então $C = D$;

(d) se A é invertível e $EA = FA$ (E e F matrizes $m \times n$), então $E = F$.

17. Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix};$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$

18. (a) Ache a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

(b) Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$ usando a igualdade

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

19. Considere as matrizes

$E_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

(a) Efectue os produtos $E_{21}(2)A$ e $AE_{21}(2)$.

(b) O que observa relativamente às linhas de $E_{21}(2)A$ e às colunas de $AE_{21}(2)$?

(c) O que observa relativamente às linhas de $E_{32}(2)A$ e às colunas de $AE_{32}(2)$ sendo $E_{32}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$?

(d) Generalize as observações efectuadas.

20. Que mudança se dá no produto AB das matrizes A e B se:

(a) trocarmos as linhas i e j de A ? Efectuarmos uma permutação nas linhas de A ?

(b) trocarmos as colunas i e j de B ? Efectuarmos uma permutação nas colunas de B ?

21. Considere as matrizes 3×3

$$E_{21}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{31}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{32}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os produtos $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)$, $E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$, $E_{21}(\alpha)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{21}(\alpha)$, $E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)$, $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$ e $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$. O que é que observa em cada um deles? Procure generalizar essa observação para matrizes $n \times n$.

22. Seja E a matriz elementar 4×4 cujo efeito, quando multiplicada por uma matriz, é adicionar a primeira linha à terceira.

(a) Qual é o efeito de E^{50}?

(b) Escreva por extenso as matrizes E, E^{50} e $50E$.

23. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}.

24. Escreva todas as matrizes de permutação 3×3, incluindo $P = I$, e para cada uma identifique a sua inversa (que também é uma matriz de permutação).

25. Quantas matrizes de permutação $n \times n$ existem ?

26. Que mudança se dá em A^{-1} se em A

(a) trocarmos as linhas i e j ? (Generalize para o caso em que se faz uma permutação qualquer às linhas de A).

(b) multiplicarmos a linha i por um número $\alpha \neq 0$?

(c) à linha i adicionarmos a linha j multiplicada por um número α?

27. O mesmo que o exercício 26 com colunas em vez de linhas.

28. Dê exemplos não triviais (isto é, $\neq I$ e $\neq -I$) de matrizes 2×2 que sejam inversas de si próprias.

29. (a) Mostre que se uma matriz quadrada tem uma linha (ou uma coluna) nula então não pode ser invertível.

(b) Mostre que se numa matriz quadrada uma linha (ou uma coluna) é múltipla de outra então a matriz não pode ser invertível.

(c) Mostre que se uma matriz 2×2 não é invertível, então há de certeza uma linha (e uma coluna) que é múltipla da outra.

(d) Dê um exemplo de uma matriz 3×3 que não seja invertível mas em que nenhuma linha (nem coluna) seja múltipla de outra.