Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 3

30. Se A é uma matriz invertível e α é um escalar não nulo, mostre que a matriz αA é invertível tendo-se $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

31. Prove que, se A comuta com B e esta é invertível, então A também comuta com B^{-1}.

32. Seja A uma matriz quadrada qualquer. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que, então $I - A$ é invertível tendo-se

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

33. Usando o exercício 32, calcule $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

34. Se A e B são matrizes $n \times n$ invertíveis, mostre que

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

(Que igualdade é esta no caso $n = 1$?)

35. Demonstre que a conjugação de matrizes de complexos goza das seguintes propriedades:

(a) $\overline{\overline{A}} = A$;

(b) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;

(c) $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$, sendo α um número complexo;

(d) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;

(e) $\overline{A^k} = \overline{A}^k$, sendo k um número natural;

(f) Se A for invertível, $\overline{A}$ também é, tendo-se $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

36. Sendo A quadrada, mostre que $A + A^T$ é simétrica. E $A - A^T$?

37. Sejam A $n \times n$ e S $n \times m$, com A simétrica. Mostre que $S^T AS$ é simétrica.

38. Sejam A e B matrizes $n \times n$ simétricas. Prove que a matriz $C = ABAB...ABA$ é simétrica.

39. Seja x um vector-coluna.

(a) Verifique que o produto $x^T x$ é um número (ou matriz 1×1).

(b) Mostre que, se os elementos de x forem reais, esse número é sempre não negativo e é 0 se e só se $x = 0$.

(c) Dê exemplos de vectores-coluna $x \neq 0$ com elementos complexos para os quais $x^T x = 0$ e também exemplos em que $x^T x < 0$.

40. Como sabe o produto de duas matrizes pode ser a matriz nula sem que nenhum dos factores o seja. Mas se as duas matrizes (reais) forem a transposta uma da outra, tal não acontece. Concretamente: Prove que, sendo A uma matriz $m \times n$ de elementos reais, se $A^T A = 0$ então $A = 0$.

41. Uma matriz quadrada diz-se <u>ortogonal</u> se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Verifique que a seguinte matriz é ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

42. Seja A uma matriz $n \times n$ e designemos por $v_1, v_2, ..., v_n$ as suas colunas. Prove que A é ortogonal se e só se, para $i, j = 1, 2, ..., n$, se tem $v_i^T v_j = \delta_{ij}$.

43. Uma matriz quadrada A diz-se <u>involutória</u> ou uma involução se $A^2 = I$. Mostre que cada uma das seguintes propriedades de uma matriz quadrada é consequência das outras duas: simétrica, ortogonal, involutória.

Sistemas de Equações Lineares

44. Resolva pelo método de eliminação de Gauss o sistema de equações

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x + 2y &= 6 \end{cases}$$

e desenhe no plano xy as duas rectas cujas equações são as indicadas. Desenhe também as rectas que aparecem no final da eliminação.

45. Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação. Registe os pivots utilizados e as operações que efectuou com as equações.

(a) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$