Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2000/01 Folha 5

55. Considere as matrizes $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ e $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Decomponha, de várias maneiras diferentes, L_1 e L_2 como produto de matrizes triangulares inferiores elementares.

(b) Use a alínea anterior para escrever L_1^{-1} e L_2^{-1} como produto de matrizes triangulares inferiores elementares.

(c) Calcule L_1^{-1} e L_2^{-1}.

(d) Decomponha L_1^{-1} e L_2^{-1} como produto de matrizes triangulares inferiores elementares cujos α's sejam os elementos das matrizes L_1^{-1} e L_2^{-1} obtidas em (c). Observe que não existe uma expressão simples para obter L_1^{-1} e L_2^{-1} a partir das entradas de L_1 e L_2, respectivamente.

56. Ache as decomposições LU e LDU das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Que relação nota entre os factores triangulares da decomposição LDU nas alíneas (d) e (e) ? (Ver-se-á adiante que isto está relacionado com a estrutura das matrizes dessas alíneas.)

57. Mediante a resolução de sistemas triangulares resolva os sistemas $Ax = b_1$ e $Ax = b_2$ onde,

(a) A é a matriz da alínea (c) do exercício 56 e com

$b_1 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

(b) A é a matriz da alínea (e) do exercício 56 e com

$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$;

(c) A é a matriz da alínea (f) do exercício 56 e com

$b_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 - 4 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$.

58. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a decomposição LU de A.

(b) Determine a matriz inversa de L e a matriz inversa de U.

(c) Usando os resultados obtidos na alínea anterior calcule A^{-1}.

59. Sendo A quadrada não singular, mostre que a matriz D nas decomposições LDU de A e A^T é a mesma.

(Por outras palavras, A e A^T têm os mesmos pivots.)

60. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ determine uma matriz de permutação P para a qual exista a decomposição LU de PA e determine os factores dessa decomposição.

61. Determine as decomposições $PA = LDU$ sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $a, c, d \neq 0$.

62. Dê exemplo de uma matriz não singular 4×4 que exija três trocas de linhas para levar a eliminação até ao fim.

63. Para cada uma das matrizes $A = \begin{bmatrix} \gamma & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 8 & 3 \\ 0 & \beta & 3 \end{bmatrix}$, diga que valores dos parâmetros tornam necessárias trocas de linhas no processo de factorização, e que valores dos parâmetros tornam a matriz singular.

64. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, onde b_1, b_2, b_3 $\in \mathbb{R}$. Resolva os seguintes sistemas:

(a) $Ax = b$; (b) $PAx = b$; (c) $Ax = Pb$;

(d) $LPUx = b$, onde L e U são as matrizes da factorização da matriz A acima.

65. Ache a decomposição $A = LU$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e resolva $Ax = b$ para os três segundos membros indicados:

(a) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (b) $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, (c) $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

66. Ache as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

67. Tendo presente o método de Gauss-Jordan, recorde que, se uma matriz é invertível, então pode escrever-se como um produto de matrizes elementares, matrizes de permutação e matrizes diagonais não-singulares. Escreva nessa forma as matrizes do exercício 66.