Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 6

68. Seja $A = LDU$ com D diagonal não singular e L e U triangulares (resp. inferior e superior) de elementos diagonais iguais a 1. Prove que, se A for simétrica, então $U = L^T$.

    Sugestão: Transponha ambos os membros da igualdade $A = LDU$ e use a unicidade da factorização LDU de A.

    (Portanto, para matrizes não singulares simétricas, a eliminação é mais simples.)

69. Efectue a factorizacao LDL^T das seguintes matrizes:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 25 & 10 \\ 7 & 25 & 39 & 22 \\ 3 & 10 & 22 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

70. Para cada uma das seguintes matrizes A,

    - determine uma factorização LU, onde L é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada (se tal não for possível, faça-o para PA, onde P é uma matriz de permutação adequada);

    - registe os pivots usados na eliminação e indique a característica de A;

    - determine relativamente ao sistema $Ax = 0$, as incógnitas básicas e as incógnitas livres e escreva a solução geral como combinação linear de um número de vectores tão pequeno quanto possível:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$;

    (d) a transposta da matriz da alínea anterior;

    (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

71. Para as matrizes das alíneas (c), (d) e (e) do exercício 70, diga quais os vectores coluna b para os quais o sistema $Ax = b$ é possível e para esses escreva a solução geral do sistema.

72. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução geral do sistema homogéneo correspondente:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 16 \end{cases}$.

73. Seja A uma matriz qualquer. Mostre que, se b for uma coluna de A, então o sistema $Ax = b$ é possível e indique uma solução.

Determinantes

74. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Qual a relação com $detA$ de:

(a) $\det(2A)$? (b) $\det(-A)$?

75. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

76. Calcule os determinantes das matrizes referidas nos exercícios 1, 2.(c), 11.(a)(i), 11.(a)(ii), 12, 17.(a), 19, 21 e 41.

77. Calcule o determinante de cada uma matrizes seguintes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

78. Calcule os determinantes das matrizes do exercício 66, bem como das respectivas matrizes inversas. Que relação existe entre o determinante de uma matriz e o determinante da matriz inversa?