Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 8

97. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e suponha que um vector u é uma combinação linear deles. Sabe-se que, se os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forem linearmente independentes, os coeficientes dessa combinação linear são univocamente determinados por u (isto é, u não se pode escrever como combinação linear desses vectores de mais que uma maneira).

    Reciprocamente, prove que, se u se escreve como combinação linear deles de uma única maneira, então $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

98. Prove que a dependência ou independência de um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ não se altera se:

    (a) multiplicarmos um dos vectores do conjunto por um número $\alpha \neq 0$;

    (b) somarmos a um dos vectores outro do conjunto multiplicado por um número.

    (c) Prove, ainda, que após cada uma destas transformações, o subespaço gerado pelo conjunto continua a ser o mesmo.

99. Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$. Prove que para qualquer vector de $\mathbb{R}^n$ se verifica a seguinte equivalência:

$$v \notin \mathcal{L}(S) \Longleftrightarrow \dim \mathcal{L}(S \cup \{v\}) = 1 + \dim \mathcal{L}(S).$$

100. Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 2, 1)$.

101. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, -3, 1),\ v_2 = (0, 1, 2),\ v_3 = (1, 1, -2)$.

     (a) Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

     (b) Determine as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ relativamente a essa base.

102. Determine a dimensão e indique duas bases diferentes para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 3),\ (4, 5, 6),\ (7, 8, 9)$.

103. Para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ encontrados no exercício 79, determine a sua dimensão e indique uma base.

104. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, prove que se trata de um subespaço, determine a sua dimensão e indique uma base.

     (a) O conjunto dos vectores com a primeira e a última coordenadas iguais.

     (b) O conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são nulas.

     (c) O conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são todas iguais.

     (d) O conjunto dos vectores da forma $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, ...)$.

105. Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, determine a dimensão e indique uma base do subespaço de $\mathbb{R}^n$ definido pela equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0.$$

106. Prove que, se F e G forem subespaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^5$, então F e G têm de certeza um vector não nulo em comum.
(**Sugestão:** Se juntarmos uma base de F com uma base de G obtemos 6 vectores.)

107. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_3 \text{ e } x_4 = 2x_2\},\ G = \mathcal{L}\{(1,0,1,0), (0,2,0,1), (-1,2,-1,1)\}.$$

Determine a dimensão e indique uma base para F, G, $F + G$ e $F \cap G$.

108. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$.

 (a) Prove que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
 (**Sugestão**: Considere uma base de $F \cap G$ e estenda-a por um lado a uma base de F e por outro lado a uma base de G. Em seguida verifique que reunindo as duas bases assim obtidas - e, claro, eliminando vectores repetidos, que são os da base de $F \cap G$ - se obtém uma base de $F + G$.)

 (b) Conclua da alínea anterior que, se $F \cap G = \{0\}$, então $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$. Como se pode obter uma base para $F \oplus G$ a partir das bases de F e G?

 (c) Prove que $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.

109. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\},\ G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}.$$

 (a) Prove que F e G são subespaços de $\mathbb{R}^3$. Descreva-os geometricamente.

 (b) Mostre que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Será $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

110. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Determine um subespaço suplementar de F, isto é, um subespaço G tal que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
Esse espaço suplementar é único?

111. Mesmo exercício com o subespaço de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{L}\{(1,2,3,0), (2,-1,2,1)\}$.

112. Se F é um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$, quais são os possíveis subespaços suplementares de F?
E se F é uma recta que passa na origem?

113. Determine a característica e o espaço nulo das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.