Álgebra Linear e Geometria Analítica — Prova Suplementar — 19/02/01

Licenciaturas em Bioquímica (opção), Química e Química Industrial e em Engenharias Geológica, Minas e Química

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, uma matriz simétrica e não singular e considere-se a sua decomposição $A = LDU$ em que D é uma matriz diagonal com elementos diagonais positivos, L é uma matriz triangular inferior com uns na diagonal principal e U é uma matriz triangular superior com uns na diagonal principal.

   (a) Prove que $L = U^\top$.

   (b) Mostre que A se pode escrever na forma $\bar{L}\bar{L}^\top$ em que $\bar{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

   (c) Prove, a partir da alínea anterior, que os valores próprios de A são positivos.

2. Considere a decomposição $A = QR$ de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ com n columas linearmente independentes ($m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$). A matriz $Q \in M_m(\mathbb{R})$ é ortogonal e a matriz $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $R_1 \in M_n(\mathbb{R})$ é não singular.
   Seja b um vector em $\mathbb{R}^m$ e $\bar{x}$ a solução no sentido dos minímos quadrados de $Ax = b$.
   Seja Q_1 a submatriz de Q constituída pelas suas primeiras n colunas.

   (a) Mostre que
   $$\|b - A\bar{x}\| \;=\; \left\|Q^\top b - R\bar{x}\right\|,$$
   e indique, com base nesta igualdade, como seria possível calcular $\bar{x}$ através da decomposição QR da matriz A.

   (b) Mostre que as colunas de Q_1 formam uma base ortogonal para o subespaço $C(A)$.

   (c) Mostre que $Q_1^\top b$ são as coordenadas de $A\bar{x}$ na base referida na alínea anterior.