Álgebra Linear e Geometria Analítica — Prova Suplementar — 06/03/02

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

Duração: 2h

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Seja A uma matriz com elementos reais, do tipo $m \times n$, em que m e n são números inteiros positivos a satisfazer $m < n$, e com característica m.

   (a) Prove que $AA^\top$ é uma matriz simétrica.

   (b) Prove que $AA^\top$ é invertível.

   (c) Mostre que os valores próprios de $AA^\top$ são números reais positivos.

   (d) Prove que $x_* = A^\top(AA^\top)^{-1}b$ é uma solução do sistema de equações lineares $Ax = b$. Calcule $\|x_*\|$.

2. Neste exercício todas as matrizes são quadradas de ordem n com elementos reais, em que n designa um número inteiro positivo. São verdadeiras as seguintes fórmulas:

$$det(AB) = det(A)det(B) \quad \text{e} \quad det(A) = det(A^\top).$$

   (a) Prove que o determinante de uma matriz ortogonal Q ou é 1 ou é -1.

   (b) Mostre que $T^{-1}RT$ e R têm os mesmos valores próprios. Qual é a relação entre os vectores próprios de $T^{-1}RT$ e os de R?