COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Exame – 15/06/04

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas.

---

1. Considere a seguinte matriz em $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Complete esta matriz de forma a ser circulante.

   (b) Complete esta matriz de forma a ter valores próprios reais.

   (c) Complete esta matriz de forma a ser unitariamente diagonalizável.

   (d) Complete esta matriz de forma a ter um e um só valor singular positivo.

   (e) No caso da alínea (a), escreva a matriz na forma $[\,h \;\; C^7h \;\; C^5h\,]$, em que C é a matriz de permutação de deslocamento inferior de ordem 3 e h um vector em $\mathbb{C}^3$.

   (f) Indique os valores próprios de C^5.

2. Seja S o plano de equação cartesiana

$$x_1 + x_2 + x_3 \;=\; 1.$$

   (a) Identifique uma base para $F^{\perp}$, em que F é o subespaço director do plano.

   (b) Calcule a projecção ortogonal de $v = [\,1 \;\; 0 \;\; -1\,]^{\top}$ sobre $F^{\perp}$.

   (c) Escreva a equação cartesiana do plano que é paralelo a S e que passa pelo ponto $p = [\,2 \;\; 2 \;\; 2\,]^{\top}$.

v.s.f.f.

3. Considere os vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine uma base ortonormada para o subespaço gerado por v_1, v_2 e v_3 através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) Seja A a matriz 3-por-3 cujas colunas são v_1, v_2 e v_3. Com base na alínea anterior, escreva a decomposição QR da matriz A.

(c) Calcule QQ^* (em que Q é a matriz obtida na alínea anterior).

(d) Mostre que QQ^* é um projector ortogonal (se não resolveu a alínea anterior pode assumir que a matriz Q é n-por-n com colunas ortonormadas; n é um número inteiro positivo).

(e) Sobre que subespaço é que a matriz QQ^* projecta ortogonalmente? (Pode também resolver esta questão em termos abstractos, como na alínea anterior.)

4. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz tal que

$$U_1^* A V_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

com σ_1 um real positivo (igual à norma de A), $B \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{C})$ e $w \in \mathbb{C}^{n-1}$. As matrizes U_1 e V_1 são unitárias e de dimensão igual ao valor do número inteiro $n \geq 2$.

Seja $U_2\Sigma_2V_2^*$ a decomposição em valores singulares de B (na forma completa).

(a) Deduza uma expressão para Σ_2 em função de B, U_2 e V_2.

(b) Identifique matrizes unitárias U e V em $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tais que

$$U^* A V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}.$$

(c) Identifique os valores singulares de A.