
COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Exame – 09/07/04

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a seguinte matriz em $M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que a_{31} é um parâmetro complexo.

- (a) Indique, se possível, valores para a_{31} de forma a que A seja: simétrica; hermítica; ortogonal; unitária; normal; circulante.
- (b) Faça $a_{31} = 0$. Indique os valores próprios de A .
- (c) A matriz A é diagonalizável (com $a_{31} = 0$)?

2. Considere a recta e o plano de equações paramétricas dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que a recta e o plano não são concorrentes, ou seja, que a sua intersecção é um conjunto vazio.
- (b) Mostre que a recta e o plano não são paralelos.
- (c) Escreva as equações paramétricas de um hiperplano ortogonal à recta dada.

v.s.f.f.

3. Seja Q a matriz dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule $P = I - QQ^*$ e mostre que se trata de um projector ortogonal.
- (b) Sobre que subespaço projecta P ortogonalmente?
- (c) Calcule a solução no sentido dos mínimos quadrados de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utilizando, apenas, a matriz Q .

- (d) Calcule a decomposição em valores singulares de Q .

4. Considere um sistema de equações lineares da forma

$$Ax = b, \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{C}^m,$$

com m e n números inteiros positivos a verificar $m < n$. Assuma que a característica da matriz A é igual a m .

- (a) Quantos valores singulares não nulos tem A ?
- (b) Substitua A em $Ax = b$ pela trans-conjugada (operador $*$) de QR , no contexto da decomposição $A^* = QR$.
- (c) Multiplique, depois, ambos os membros do sistema por $(R^*)^{-1}$, indicando o resultado obtido. Classifique o sistema resultante desta operação.