COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Frequência – 04/06/04

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a seguinte matriz em $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Classifique esta matriz (indicando todas as propriedades matricias conhecidas que ela satisfaça).
   (b) Escreva esta matriz como uma combinação linear de C, C^2 e C^3, em que C designa a matriz de permutação de deslocamento inferior de ordem 3.
   (c) Indique os valores próprios de C em função de $w = e^{2\pi i/3}$.
   (d) A partir da fórmula da alínea (b) e dos valores próprios calculados na alínea (c), deduza uma expressão para FAF^{-1}, em que F é a matriz da transformada discreta de Fourier de ordem 3.
   (e) Indique os valores próprios de A em função de $w = e^{2\pi i/3}$.

2. Seja F o subespaço gerado pelo vector
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcule uma base para $F^{\perp}$.
   (b) Escreva as equações paramétricas do plano S que passa pela origem e é paralelo aos vectores
$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$
   (c) Que relação existe entre $F^{\perp}$ (alínea (a)) e S (alínea (b))?
   (d) Escreva as equações normais da recta perpendicular ao plano S e que passa pela origem.

v.s.f.f.

3. Sejam A e y a matriz e o vector dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule uma matriz ortogonal H em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que Hy tenha os elementos nas posições $2, 1$ e $3, 1$ nulos.

(b) A partir do resultado da alínea (a), calcule uma matriz ortogonal U em $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que UA tenha zeros na coluna 1 a seguir ao elemento na posição $1, 1$ e zeros na coluna 2 a seguir ao elemento na posição $2, 2$.

(c) Seja B a matriz constituída pelas duas primeiras colunas de A. Com base na alínea (b), indique, **sem efectuar quaisquer contas**, como poderia escrever B na forma $\hat{Q}\hat{R}$ em que $\hat{Q} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é ortogonal e $\hat{R} \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tem zeros nas linhas 3 e 4.

(d) Indique, **sem efectuar quaisquer contas**, como decomporia B na forma QR (com $Q \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $R \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$) a partir da decomposição $\hat{Q}\hat{R}$ da alínea anterior.

4. Considere um sistema de equações lineares da forma

$$Ax = b, \qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{C}^m,$$

com m e n números inteiros positivos a verificar $m < n$. Assuma que a característica da matriz A é igual a m.

(a) Classifique o sistema e substitua A em $Ax = b$ pela sua decomposição em valores singulares (na forma reduzida).

(b) Multiplique, depois, ambos os membros do sistema por U^* e $\hat{\Sigma}^{-1}$, por esta ordem, indicando o resultado obtido. Classifique, novamente, o sistema resultante destas operações.

(c) Mostre que $\hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}U^*b$ é uma solução do sistema.