Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano Lectivo 2003/04 — **Exercícios sobre geometria analítica - 1**

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

---

1. Calcule o volume do paralelipípedo definido por $(-3,2,1)$, $(1,0,-1)$ e $(3,3,-1)$.

2. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^3$, e designando por A a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\sqrt{\det(A^TA)}$.

3. Calcule a área do paralelogramo definido por $(-3,2,1)$ e $(1,0,-1)$.

4. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), e designando por θ o ângulo entre eles, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\|v_1\|\,\|v_2\|\,\mathrm{sen}\theta$.

5. Sendo $u=(2,-1,3), v=(0,1,7)$ e $w=(1,4,5)$, calcular:

   $v\wedge w$; $u\wedge(v\wedge w)$; $(u\wedge v)\wedge w$; $(u\wedge v)\wedge(v\wedge w)$;
   $u\wedge(v-2w)$; $(u\wedge v)-2w$

6. Em cada uma das alíneas ache um vector ortogonal aos dois vectores:

   (a) $u=(-7,3,1), v=(2,0,4)$. (b) $u=(-1,-1,-1), v=(2,0,2)$.

7. Dados u,v,w em $\mathbb{R}^3$, mostre que o volume do paralelipípedo definido por u,v e w é igual a $|\langle u, v\wedge w\rangle|$.

8. (a) O que é um plano de dimensão 0?

   (b) O que é um plano de dimensão n em $\mathbb{R}^n$?

9. Diga se os vectores $a=(1,6,4,4,-2)$ e $b=(1,6,5,4,-2)$ pertencem ao plano em $\mathbb{R}^5$ de equação $x=p+\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$, onde $p=(2,3,-1,1,1)$, $v_1=(3,-1,1,-1,1)$ e $v_2=(-1,1,1,1,-1)$.

10. Para cada uma das seguintes rectas em $\mathbb{R}^4$, determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1,0,0,1)$ e é paralelo aos vectores $(5,2,-3,1)$, $(4,1,-1,0)$ e $(-1,2,-5,3)$

    (a) $x=(3,1,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$ (b) $x=(3,0,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
    (c) $x=(-2,0,-1,2)+\alpha(1,1,-2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

NOTA: Os exercícios seguintes dizem todos respeito ao espaço $\mathbb{R}^3$. Neles usaremos a palavra "plano" para significar "plano de dimensão 2".

11. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1,1,0)$, $(6,0,-1)$ e $(3,0,0)$.

12. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(3,1,-1)$ e tem a direcção de $(1,-1,2)$.

13. Considere a recta de equação vectorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$, mostre que a recta pode ser definida pelas igualdades

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

(A estas igualdades costuma chamar-se equações normais ou canónicas da recta que passa por (x_0, y_0, z_0) e tem a direcção de (a, b, c).)

14. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 2, 2)$ e é paralelo às rectas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

15. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(2, 1, -3)$ e por $(4, 0, -2)$.

16. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, -1)$ e é paralelo a $(2, 1, 0)$.

17. Diga se existe um plano em $\mathbb{R}^3$ que contenha $(2, 1, 3), (0, 3, 9), (3, 3, 4)$ e $(7, 5, 0)$.

18. Mostre que a intersecção dos planos em $\mathbb{R}^3$ $\{(8, 0, 0)\} + \mathcal{L}\{(-4, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ e $\mathcal{L}\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ é uma recta e determine equações paramétricas dessa recta.

19. Determine equações paramétricas do plano em $\mathbb{R}^3$ que contém $(1, 0, 0)$ e também contém a recta de equação $x = (0, 1, 0) + \alpha(0, 1, -2), \alpha \in \mathbb{R}$.

20. Escreva uma equação cartesiana de cada um dos seguintes planos em $\mathbb{R}^3$:

    (a) O plano que contém o ponto $(1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vector $(-1, 1, 0)$.

    (b) O plano que contém os pontos $(2, 1, 3)$, $(-3, -1, 3)$ e $(4, 2, 3)$.

    (c) O plano que contém o ponto $(6, 0, -2)$ e é paralelo aos vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, -2, 1)$.

    (d) O plano que contém o ponto $(4, -1, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - 3y - z = 5$.

21. Dado o plano em $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $3x - 2y - z = 6$, determine equações paramétricas desse plano.

22. (a) Considere o plano em $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $ax + by + cz = d$. Qual é o significado geométrico da condição $c = 0$?

    (b) Sejam dados m pontos no espaço $\mathbb{R}^3$. Como procederia para determinar o plano (não paralelo ao eixo dos zz) que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses m pontos?

Estes exercícios foram retirados das Folhas 15 e 16 da disciplina de ALGA 1 (Licenciatura em Matemática do DM da FCTUC).