Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano Lectivo 2003/04 — **Exercícios sobre geometria analítica - 2**

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

---

1. Calcule a distância do ponto $b = (2, 1, 0)$ ao plano em $\mathbb{R}^3$ de equação $x + y - z = 0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b?

2. O ângulo entre dois planos $\langle u, x - p\rangle = 0$ e $\langle v, x - q\rangle = 0$ é o ângulo entre u e v (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).
   Calcule o ângulo entre os planos em $\mathbb{R}^3$ de equações $x + y + 4z = 1$ e $x - 2y - 2z = 3$.

3. Determine equações cartesianas da recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(2, -1, 4)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.

4. Determine equações paramétricas da recta em $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{array}{l} 2x - y - 3z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right.$.

5. A distância de um ponto v a uma recta $x = p + \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é a distância de $v - p$ à sua projecção ortogonal u. Moste que uma fórmula para essa distância é
$$\frac{\sqrt{\|v-p\|^2\|u\|^2 - \langle v-p, u\rangle^2}}{\|u\|}.$$
   (Porque é que o radicando é não-negativo?)

6. Calcule a distância do ponto $x_0 = (2, 0, 7)$
   (a) à recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $p = (0, 2, -3)$ e é paralela a $v = (2, 2, 1)$;
   (b) à recta em $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas $\left\{\begin{array}{l} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{array}\right.$.

7. Dadas as rectas em $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{array}\right.$ e $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right.$
   (a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;
   (b) calcule o ângulo entre elas.

   Nota: O ângulo entre duas rectas $x = p + \alpha v$ e $x = q + \alpha w$ é o ângulo entre v e w (ou o suplementar desse).

8. Considere a recta R em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\left\{\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{array}\right.$ e os planos P_1 e P_2 de equações cartesianas $x + y - z = 0$ e $x - y - 5 = 0$, respectivamente. Determine:
   (a) Equações paramétricas da recta paralela a R e que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$. Qual é a distância entre estas duas rectas?

(b) Uma equação vectorial da recta que passa por $(1,0,1)$ e é paralela aos planos P_1 e P_2.

(c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano P_1 e que contém a recta R.

9. Considere as rectas R_1 e R_2 em $\mathbb{R}^3$ de equações $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$, respectivamente, e o plano P de equação $x + y + 2z = 2$.

   (a) Determine a posição relativa de R_1 e R_2.

   (b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém R_1 e R_2.

   (c) Calcule a distância entre R_2 e P.

10. Considere a recta R_α em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\begin{cases} x + (\alpha+1)y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ onde α é um parâmetro real.

   (a) Escreva uma equação vectorial de R_α.

   (b) Determine α de forma que:

      i. R_α seja perpendicular ao plano de equação $2y + 2z = 1$.

      ii. R_α seja paralela ao plano de equação $x - 2y + 2z = 1$, e nesse caso calcule a distância de R_α a este plano.

Estes exercícios foram retirados da Folha 16 da disciplina de ALGA 1 (Licenciatura em Matemática do DM da FCTUC).