Cálculo Infinitesimal II — Exame – 14/07/00

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

Duração: 2h 30m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Considere as curvas definidas em coordenadas polares por

$$\rho = \operatorname{sen}\theta,$$
$$\rho = \tfrac{1}{2}.$$

   (a) Esboce a região do plano interior a ambas as curvas.

   (b) Determine os pontos de intersecção das duas curvas.

2. Considere a função $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em torno do ponto 0 e o respectivo resto na forma de Taylor-Young.

   (b) Com base na alínea anterior calcule

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1 - x(1 + \frac{x}{2})}{x^3}.$$

3. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

   (a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^n + \cos n}{n^3 + 1}.$$

   (b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

   (c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}.$$

v.s.f.f.

4. Considere a sucessão de funções $\{f_n(x)\}$ definida por:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{array}.$$

   (a) Determine, caso exista, o limite pontual de $\{f_n(x)\}$ em $[0,5]$.
   (b) Com base na alínea anterior diga se existe convergência uniforme em $[0,5]$.
   (c) Verifique se existe convergência uniforme em $[0,1/2]$.

5. Sabe-se que o seguinte desenvolvimento em série de potências é válido para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

   (a) Determine um desenvolvimento em série de potências da função $\cos(x)$.
   (b) Determine um desenvolvimento em série de potências da função $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$.
   (c) Indique os raios de convergência em que estes desenvolvimentos são válidos.

6. Considere a seguinte função real de duas variáveis reais:

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

e as curvas

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

   (a) Calcule os limites de f quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo de C_1 e C_2.
   (b) O que é que pode concluir sobre $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ com base no resultado da alínea anterior.

   Considere agora a função real de duas variáveis reais:

$$f(x,y) = -\ln(x^3 + y^3)$$

   e seja (x,y) um ponto do domínio desta função.

   (c) Mostre que $f_{xy}(x,y) = f_x(x,y) f_y(x,y)$.
   (d) Indique $f_{yx}(x,y)$ sem efectuar quaisquer cálculos. Justifique a sua resposta.

7. Calcule

$$\int_0^1 2 \int_0^{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} 1 \, dy \, dx \,.$$

e descreva geometricamente o exterior da região de integração.