Cálculo Infinitesimal II — Exame – 28/06/99

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

Duração: 2h 30m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno do ponto 1, ou seja $P_2(x; 1)$, bem como o correspondente resto $R_2(x; 1)$ na forma de Lagrange.

   (b) Calcule $P_2(1.21; 1)$. Qual é o valor de $R_2(1.21; 1)$?

2. (a) Mostre que a série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$$
é convergente.

   (b) Usando o critério do integral, prove que a série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$
é divergente.

   (c) Deduza das alíneas anteriores o raio de convergência da série de potências
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} x^n \,.$$

3. Considere a sucessão de funções $\{f_n(x)\}$ definida por:
$$\begin{array}{rccc} f_n : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\operatorname{sen} x)^n \,. \end{array}$$

   (a) Determine o limite pontual de $\{f_n(x)\}$.

   (b) Averigue se a convergência é uniforme em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Mostre que $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente em $[0, b]$, para qualquer $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

v.s.f.f.

4. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\,. \end{array}$$

   (a) Determine a série dos senos de f.

   (b) Usando a alínea anterior em $x = \pi/2$, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

5. Considere a seguinte função real de duas variáveis reais:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\,.$$

   (a) Qual é o domínio de f?

   (b) Mostre, recorrendo à desigualdade $x^2 \leq x^2 + y^2$, que

$$|f(x,y) - 0| \;\leq\; \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

   (c) Com base no resultado da alínea anterior determine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Em que pontos do seu domínio é que a função f é contínua?

   (d) Calcule o gradiente de f em $(x,y) \neq (0,0)$.

6. Considere o integral duplo

$$\int_0^2 \int_{\frac{y(2-y)}{2}}^{1} 1\, dx\, dy\,.$$

   (a) Determine o seu valor.

   (b) Indique analítica e geometricamente a região do plano R sobre o qual se está a integrar a função constante $f(x,y) = 1$.

   (c) Indique analítica e geometricamente o interior e a fronteira da região R.