Cálculo Infinitesimal II — Exame – 16/09/99

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

Duração: 2h 30m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. (a) Escreva a série de Taylor de $\ln(1+t)$ em torno de $t=0$. Em que intervalo é que essa expressão é válida?

   (b) Seja $t=(x-2)/2$. Mostre que

   $$\ln x \;=\; \ln 2 + \ln(1+t)\,.$$

   (c) Com base na alínea anterior determine a série de Taylor de $\ln x$ em potências de $x-2$. Em que intervalo é que essa expressão é válida?

2. (a) Considere a sucessão $\{a_n\}$ definida por

   $$\begin{aligned} &a_0 = b\,,\\ &a_n = \frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k,\ n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

   Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   (b) Determine a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

   Sugestão: Decomponha a fracção $\dfrac{1}{n^2+n}$ numa soma da forma $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

3. Considere a sucessão de funções

   $$\begin{array}{rccc} f_n: & [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1+nx+n^2x^2}{1+n^2x}\,. \end{array}$$

   (a) Determine o limite pontual de $\{f_n(x)\}$.

   (b) Averigue se a convergência é uniforme em $\mathbb{R}$.

v.s.f.f.

4. Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

   (a) Determine o seu raio de convergência e mostre que a série define uma função contínua $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$.

   (b) Desenvolva em série de potências de x a função $F:(-1,1)\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,.$$

   (c) Usando a alínea anterior, determine, para cada $x\in(-1,1)$, a soma da série que define $f(x)$.

5. Considere a seguinte função vectorial de duas variáveis reais:

$$G(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{sen(x-y)}{cos(x+y)}\\ \sqrt{1-x^2-y^2}\\ xy\end{pmatrix}.$$

   (a) Qual é o domínio de G? E o conjunto de chegada?

   (b) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)}G(x,y)$.

   (c) Calcule a matriz Jacobiana de G num ponto (x,y) do seu domínio.

6. Considere o conjunto

$$R\;=\;\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x\geq 0\,,\;x\leq\frac{y(2-y)}{2}\right\}.$$

   (a) Indique analítica e geometricamente a fronteira e o derivado de R.

   (b) Calcule $\int\int_R 1\,dx\,dy$.

   (c) Esboce um sólido cujo volume foi calculado na alínea anterior.