Cálculo Infinitesimal II – Resolução do Teste Diagnóstico – 1999/00

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

1(a) Sim, dado que os pares de coordenadas polares $(\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ representam o mesmo ponto no plano cartesiano, e o último par satisfaz a equação da curva.

1(b) Apenas podemos concluir que a curva é simétrica relativamente ao eixo dos yy's. (Se $f(\theta) = (1/5)\theta$, então temos que para todo o θ, $f(\theta) = -f(-\theta)$).

1(c)

2(a)

$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = x.$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2} = x - \dfrac{x^2}{2}.$

$R_1(x) = f''(\alpha)\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2(1+\alpha)^2}$, para algum α entre 0 e x.

$R_2(x) = f'''(\alpha)\dfrac{x^3}{6} = \dfrac{x^3}{3(1+\alpha)^3}$, para algum α entre 0 e x.

Fórmula de Taylor de grau um: $f(x) = P_1(x) + R_1(x)$.

Fórmula de Taylor de grau dois: $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$.

2(b) $\log(1+x) - x = R_1(x) \leq 0$, para todo o $x \geq 0$.

$\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} = R_2(x) \geq 0$, para todo o $x \geq 0$.

2(c) Da alínea anterior resulta que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\log(1+n)}{n^3} \leq \dfrac{1+n}{n^3}$.

Por outro lado, utilizando o segundo critério da comparação, prova-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+n}{n^3}$ é convergente, pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente.

Logo, recorrendo ao primeiro critério da comparação, conclui-se que a série converge.

3(a) Para $n \geq 1$, a sucessão das somas parciais é dada por $S_n = \dfrac{1}{n}$ e é, portanto, convergente. A série dada é, assim, por definição, convergente.

3(b) Sabemos que $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ e que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente. Recorrendo ao primeiro critério da comparação, afirma-se que a série dada é convergente. (**Nota**: Esta alínea também poderia ser resolvida através do segundo critério da comparação.)

4

Em ambas as alíneas vamos utilizar o facto de

$$f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$$

ser uma função decrescente em $[2, +\infty[$, algo que pode ser facilmente verificado recorrendo a $f'(x)$:

$$\forall x \geq 2 \quad f'(x) = -\frac{1+\log(x)}{(x\log(x))^2} < 0.$$

4(a) Trata-se de uma série alternada. Consideremos a sucessão definida por

$$b_n = \frac{1}{n\log(n)}\,,\; n \geq 2.$$

Pelo que vimos em cima esta sucessão é decrescente. Os seus termos são positivos e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Deste modo, pelo Critério de Leibniz, a série dada é convergente.

4(b) A função f verifica

$$f(n) = \frac{1}{n\log(n)}$$

e é positiva e decrescente. Sabe-se então, pelo Critério do Integral, que a série dada e o integral impróprio $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ apresentam a mesma natureza. Como $\int f(x)\,dx = \log(\log(x)) + C$ (primitiva imediata), o integral impróprio é divergente. Logo, a série dada diverge.

4(c) Seja r o raio de convergência da série de potências dada. A série de potências converge para $x = -1$, donde $r \geq 1$. A série de potências diverge para $x = 1$, donde $r \leq 1$. Assim, $r = 1$.

5(a) O limite pontual é dado por : $f(x) = 0$ se $x \in [0, \pi/2[$ e $f(\pi/2) = 1$.

Todas as funções f_n são contínuas em $[0, \pi/2]$. Como o limite pontual não é uma função contínua em $[0, \pi/2]$, resulta que a convergência não é uniforme em $[0, \pi/2]$.

5(b) Seja então $b \in]0, \pi/2[$ e defina-se

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in\,[0,b]} |\, f_n(x) - 0 \,| = \sup_{x\in\,[0,b]} (\operatorname{sen} x)^n.$$

Seja $g(x) = (\operatorname{sen} x)^n$. Pelo facto de g ser contínua em $[0, b]$, podemos substituir *supremo* por *máximo*:

$$\varepsilon_n = \max_{x\in\,[0,b]} g(x).$$

Como $g'(x) = n\cos x(\operatorname{sen} x)^{n-1} > 0\, \forall x \in]0, b[$, a função g atinge o seu máximo no ponto $x = b$, e $\varepsilon_n = (\operatorname{sen} b)^n$. Consequentemente, $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ (veja-se que $\operatorname{sen} b \in]0, 1[$), o que, atendendo ao Critério do ε_n, permite concluir que a convergência é uniforme em $[0, b]$.

Cotação:

1: 3.0 (a: 1.0; b: 1.0; c: 1.0) **2**: 4.5 (a: 1.5; b: 1.5; c: 1.5) **3**: 3.5 (a: 1.75; b: 1.75) **4**: 4.5 (a: 1.5; b: 1.5; c: 1.5) **5**: 4.5 (a: 1.5; b: 1.5; c: 1.5)