Cálculo Infinitesimal II — Teste Diagnóstico – 1999/00

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

ATENÇÃO:

- Justifique todas as suas respostas.
- Resolva o teste individualmente e sem consulta, em menos de 2h 15m.
- A resolução e a cotação do teste serão entregues na aula prática de 2 de Maio (e disponibilizadas na página da disciplina a partir do dia 26 de Abril).
- Os testes deverão ser entregues, já corrigidos pelos próprios, na aula teórica do dia 3 de Maio.

1. Considere a curva em coordenadas polares (conhecida por espiral de Arquimedes) definida pela equação

$$\rho = \frac{1}{5}\theta\,.$$

   (a) O ponto representado pelas coordenadas polares $(\rho, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$ pertence a esta curva?

   (b) Estude a simetria da curva em relação à origem e aos eixos coordenados.

   (c) Trace geometricamente a curva de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$.

2. Considere $f(x) = \log(1 + x)$, $x > -1$.

   (a) Determine a fórmula de Taylor de grau 1 e de grau 2 com resto de Lagrange da função f no ponto $a = 0$.

   (b) Com base na alínea anterior, prove que, para $x \geq 0$, são válidas as desigualdades

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x.$$

   (c) Utilizando uma das desigualdades da alínea anterior, estude a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n)}{n^3}$.

v.s.f.f.

3. (a) Considere a sucessão $\{a_n\}$ definida por

$$\begin{aligned} a_0 &= b\,, \\ a_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k,\ n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(b) Determine a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

4. (a) Mostre que a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$$

é convergente.

(b) Usando o critério do integral, prove que a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

é divergente.

(c) Deduza das alíneas anteriores o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} x^n\,.$$

5. Considere a sucessão de funções $\{f_n(x)\}$ definida por:

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\operatorname{sen} x)^n\,. \end{array}$$

(a) Determine o limite pontual de $\{f_n(x)\}$.

(b) Averigue se a convergência é uniforme em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(c) Mostre que $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente em $[0, b]$, para qualquer $b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.