Matemática Financeira

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 2

Data de recepção: **07/03/2006**; Data de entrega: **21/03/2006** (na aula teórica)

1. Aplique a Fórmula de Itô quando $f(t, S) = S$. Conclua que $dR_t = dS_t$ e diga por que motivo teria de obter este resultado.

2. Prove que a função densidade de S_t é dada por

$$h_t(s) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sigma s\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}[\log(s/s_0) - (\mu - \sigma^2/2)t]^2\right) & s > 0, \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$$

3. Mostre que $E(\Delta X(t)^2) = \Delta t$, $E(\Delta X(t)^4) = 3\Delta t^2$ e $V(\Delta X(t)^2) = 2(\Delta t)^2$.

4. Trace histogramas para os valores de S_T e de $\log(S_T)$ recorrendo à `m-file` da Aula 4 (`caminho_aleatorio`) e utilizando, obrigatoriamente, o comando

   `hist(v, 100)`

   em que `v` representa um vector com 10000 componentes. O que observa em ambos os casos está de acordo com o que se sabe sobre a distribuição de um activo financeiro?

5. Dadas $n+1$ observações consecutivas $S_0, S_1, \ldots, S_n$ (por exemplo diárias) do valor de um activo financeiro, os seus retornos podem ser calculados através de

$$u_i \;=\; \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

   Desta forma, é possível estimar a média e o desvio padrão destes retornos por

$$\bar{u} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{e} \quad \bar{s} \;=\; \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}.$$

   (a) Recorrendo à `m-file` da Aula 4 (`caminho_aleatorio`), calcule os valores de $\bar{u}$ e de $\bar{s}$ para um caminho aleatório gerado pelo código.

   (b) A partir do valor de $\bar{s}$, calcule uma aproximação para a volatilidade σ.