Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 1

Data de recepção: **12/09/2005**; Data de entrega: **26/09/2005** (na aula teórica)

1. Considere a função vectorial $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} x_n \\ x_n \end{bmatrix},$$

   em que n é um número inteiro ímpar maior que ou igual a 5.

   (a) Calcule a matriz Jacobiana de F.

   (b) Efectue, se possível, uma iteração do método de Newton partindo do ponto $x_0 = [\,1 \;\; 1 \;\; \cdots \;\; 1\,]^\top \in \mathbb{R}^n$.

   (c) Efectue, se possível, uma iteração do método de Newton partindo do ponto $x_0 = [\,-1 \;\; -1 \;\; \cdots \;\; -1\,]^\top \in \mathbb{R}^n$.

   (d) O que é que pode concluir sobre o comportamento do método de Newton a partir destas duas últimas alíneas?

   Nota: Se encontrar dificuldades faça primeiro o caso $n = 5$.

2. Prove que o método de Newton converge numa iteração quando aplicado à resolução de um sistema de equações lineares (possível determinado).

3. Seja $\{x_k\}$ uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ a convergir para x_*. A convergência diz-se r-quadrática se existir uma sucessão real $\{\alpha_k\}$, a convergir q-quadraticamente para zero, tal que, para todo o k,

$$\|x_k - x_*\| \;\leq\; \alpha_k.$$

   Prove que se uma sucessão $\{y_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ convergir q-quadraticamente para y_* então as sucessões $\{(y_k)_i\}$ convergem r-quadraticamente para $(y_*)_i$, para todas as componentes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Nota: Este exercício aplica-se, também, aos casos linear e superlinear.

4. Tente detectar com o método de Newton, em MATLAB, partindo de pontos iniciais diferentes, as quatro raízes de

$$F(x) \;=\; \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - 2 \end{bmatrix} \;=\; 0.$$

O que acontece se começar com o ponto $x_0 = [\,\sqrt{2}/2 \;\; 0\,]^\top$? Como poderia contornar o problema?

5. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k \;=\; -F(x_k) + e_k,$$

em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1, que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \;\le\; c\|F(x_k)\|^2 \qquad \text{para todo o } \; k.$$