Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 2 – TP1

Data de recepção: **14/10/2004**; Data de entrega: **09/11/2004** (na aula teórica)

1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável. Seja α um número real positivo diferente de 1.
   (a) Calcule a direcção de descida máxima (d) e o passo de Newton (p) para a função αf. Qual das duas direcções é insensível a este escalonamento?
   (b) Faça, agora, $f(x) = \|x\|^2$. Que valor escolheria para α de forma a que a direcção de descida máxima e o passo de Newton coincidissem?

2. A aproximação de uma matriz Jacobiana, $m \times n$, por diferenciação numérica pode ser feita linha a linha, aproximando cada gradiente por diferenças progressivas com uma precisão da ordem de ϵ (como foi explicado na aula). Se o seu objectivo fosse, porém, aproximar o produto de uma matriz Jacobiana $J(x)$ por um vector p, como poderia levar a cabo esta aproximação de forma mais económica e com igual precisão (ordem de ϵ)?

3. Suponha que o cálculo do integral $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$ é feito através da fórmula de quadratura
$$I_1(f) \;=\; \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1).$$
   (a) Determine α_0 e α_1 de forma a que a fórmula de quadratura tenha grau de exactidão igual a 1.
   (b) Calcule α_0 e α_1 de forma a minimizar o erro
$$\left\| \begin{bmatrix} I(1) - I_1(1) \\ I(x) - I_1(x) \\ I(x^2) - I_1(x^2) \end{bmatrix} \right\|.$$

4. Copie, da página da disciplina para a sua área de trabalho, as `m-files` disponíveis para integração numérica de uma função real de duas variáveis reais.
   (a) Explique, detalhadamente, as instruções da função `integrar_2D`, identificando as fórmulas de quadratura e a forma como estão a ser aplicadas.
   (b) Implemente uma nova versão de `integrar_2D` "trocando" as fórmulas de quadratura.
   (c) Teste ambas as versões para os exemplos incluídos em `funcao.m`.

Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 2 – TP2

Data de recepção: **14/10/2004**; Data de entrega: **09/11/2004** (na aula teórica)

---

1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \; = \; \frac{\alpha}{2}\|x\|^2,$$

   com α um número real positivo.

   (a) Calcule a direcção de descida máxima (d) e o passo de Newton (p) para a função f. Conclua que as duas direcções são linearmente dependentes.

   (b) Que valor escolheria para α de forma a que a direcção de descida máxima e o passo de Newton coincidissem?

   (c) Faça, agora, $\alpha = 1$. Calcule $f(x + d)$ e $f(x + p)$. O que conclui?

2. Suponha que pretende aproximar uma matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$, $n \times n$, podendo calcular o gradiente ∇f em pontos à sua escolha. Como aproximaria a matriz Hessiana? Qual a ordem de precisão? Tem garantia de que a aproximação calculada constituiria uma matriz simétrica? E se não, como poderia calcular uma aproximação simétrica?

3. Suponha que o cálculo do integral $I(f) = \int_0^1 x f(x)\, dx$ é feito através da fórmula de quadratura

$$I_2(f) \; = \; \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1/2) + \alpha_2 f(1).$$

   (a) Determine α_0, α_1 e α_2 de forma a que a fórmula de quadratura tenha grau de exactidão não inferior a 2.

   (b) Seria possível encontrar valores para α_0, α_1 e α_2 tais que o grau de exactidão fosse igual a 3?

4. Copie, da página da disciplina para a sua área de trabalho, as `m-files` disponíveis para integração numérica de uma função real de duas variáveis reais.

   (a) Explique, detalhadamente, as instruções da função `integrar_2D`, identificando as fórmulas de quadratura e a forma como estão a ser aplicadas.

   (b) Implemente uma nova versão de `integrar_2D` "trocando" as fórmulas de quadratura.

   (c) Teste ambas as versões para os exemplos incluídos em `funcao.m`.