Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 3 – TP1 e TP2

Data de recepção: **11/11/2004**; Data de entrega: **30/11/2004** (na aula teórica)

1. Seja f uma função contínua em $[0,1]$. Considere a função real de $n+1$ variáveis reais dada por

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \;=\; \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \right)^2 dx,$$

que descreve uma forma de medir o erro da aproximação de f, em $[0,1]$, por um polinómio de grau n.

   (a) Determine escalares $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ de forma a que $\nabla g(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*) = 0$. (Estes escalares são a solução de um sistema de equações lineares. Não é necessário resolver o sistema.)

   (b) O que teria de provar para afirmar que $[\,\alpha_0^* \; \alpha_1^* \; \ldots \; \alpha_n^*\,]^\top$ é o (único) minimizante da função g?

   (c) A matriz deste sistema de equações lineares, conhecida por matriz de Hilbert, é extremamente mal-condicionada. Calcule, em MATLAB e *numa só instrução*, o número de condição desta matriz quando $n = 9$. Verifique, em MATLAB, que os seus valores próprios são todos positivos.

2. Considere as seguintes instruções em MATLAB:

```
x     = (-128:128)'/128;
A     = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
[Q,R] = qr(A,0);
scale = Q(257,:);
Q     = Q*diag(1 ./scale);
plot(Q)
```

   (a) Execute este conjunto de instruções e explique, linha-a-linha, o seu significado.

   (b) Na mesma figura e nos mesmos 257 pontos do eixo das abcissas, trace os primeiros quatro polinómios de Legendre, $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ e $L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

   (c) Explique, matematicamente, a sobreposição (a menos de erros numéricos) dos gráficos ocorrida da alínea (a) para a alínea (b).

3. Considere a matriz da transformada discreta de Fourier de ordem 3:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{bmatrix}.$$

(a) Escreva as componentes de F em função de, apenas, 1, w e w^2. Marque $1 = w^0$, $w = w^1$ e w^2 no círculo unitário do plano complexo.

(b) Mostre que $F\bar{F} = 3I$. Identifique F^{-1}.

(c) Mostre que $FC = DF$ em que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e D é a matriz diagonal de elementos diagonais 1, w e w^2. Quais são os valores próprios de C?

(d) Escreva a matriz (circulante)

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

em função das potências de C dadas por $I = C^0$, C e C^2.

(e) Multiplique esta expressão para H, à esquerda, por F e, à direita, por F^{-1}. Conclua que F também diagonaliza H. Quais são os valores próprios de H?