Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 3

Data de recepção: **17/10/2005**; Data de entrega: **02/11/2005** (na aula teórica)

1. Considere uma expansão em h dada por

$$\mathcal{A}(h) \;=\; \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \mathcal{R}_3(h),$$

em que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $|\mathcal{R}_3(h)| \le Ch^3$ (com $C > 0$ independente de h). O propósito deste exercício é motivar a técnica de *extrapolação de Richardson* (que também pode ser utilizada em integração numérica).

   (a) Qual é a ordem com que $\mathcal{A}(h)$ aproxima α_0?

   (b) Mostre, especificando α_0, α_1, α_2 e $\mathcal{R}_3(h)$, que pode descrever, desta forma, a fórmula de Taylor de ordem 2 com resto de Lagrange, para uma função f em torno de um dado ponto x_0.

   (c) Multiplique a expansão dada em cima por $\delta \in (0,1)$. Substitua, também na expansão original, h por δh. Substraia as duas igualdades assim obtidas membro a membro. Conclua que obteve uma nova aproximação para α_0 da forma

$$\mathcal{B}(h) \;=\; \frac{\mathcal{A}(\delta h) - \delta \mathcal{A}(h)}{1-\delta}.$$

   (d) Qual é a ordem com que $\mathcal{B}(h)$ aproxima α_0?

2. Copie, da página da disciplina para a sua área de trabalho, as `m-files` disponíveis para integração numérica de uma função real de duas variáveis reais.

   (a) Explique, detalhadamente, as instruções da função `integrar_2D`, identificando as fórmulas de quadratura e a forma como estão a ser aplicadas.

   (b) Implemente uma nova versão de `integrar_2D` "trocando" as fórmulas de quadratura.

   (c) Teste ambas as versões para os exemplos incluídos em `funcao.m`.

3. Com este exercício pretende-se demonstrar a expressão dada para o erro na fórmula de Simpson. Seja $w_2(x) \;=\; (x-a)(x-(a+b)/2)(x-b)$.

   (a) Mostre que $w_2(x)$ muda de sinal em $[a,b]$. Conclua que não se pode aplicar ao erro
   $$E_2(f) \;=\; \int_a^b f[a,(a+b)/2,b,x]w_2(x)\,dx$$
   o teorema do valor médio integral que se aplicou no caso da fórmula trapezoidal.

   (b) Mostre que $\int_a^b w_2(x) = 0$. Utilizando este facto e
   $$f[a,(a+b)/2,b,x] \;=\; f[a,(a+b)/2,b,x_3] + f[a,(a+b)/2,b,x_3,x](x-x_3),$$
   conclua que
   $$E_2(f) \;=\; \int_a^b f[a,(a+b)/2,b,x_3,x]w_3(x)\,dx,$$
   com $w_3(x) \;=\; w_2(x)(x-x_3)$.

   (c) Faça, agora, $x_3 = x_1 = (a+b)/2$. Mostre que $w_3(x)$ assim definido não muda de sinal em $[a,b]$. Termine a demonstração aplicando o teorema do valor médio integral.