Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 4 – TP1 e TP2

Data de recepção: **02/12/2004**; Data de entrega: **16/12/2004** (na aula teórica)

1. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) \;=\; f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0. \end{cases} \tag{P}$$

   O objectivo deste exercício é conhecer o método das diferenças finitas para a resolução do problema (P) e estabelecer a sua relação com o método dos elementos finitos. Considere o intervalo $[0,1]$ discretizado na forma

$$0 = x_0 \;<\; x_1 \;<\; \cdots \;<\; x_n \;<\; x_{n+1} = 1.$$

   Seja u_k uma aproximação para $u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$.

   (a) Com k a variar de 1 até n, escreva uma aproximação para $u''(x_k)$ recorrendo à fórmula das diferenças centrais de segunda ordem (Aula 9 de Matemática Numérica II, 2004/2005).

   (b) Tome o simétrico da aproximação obtida na alínea anterior e faça-o igual a $f(x_k)$. Reúna todas estas igualdades num sistema de equações lineares e escreva-o na sua forma matricial.

   (c) Verifique que este sistema é equivalente ao que foi obtido para o método dos elementos finitos, quando se utiliza a fórmula trapezoidal composta para aproximar $\langle f, \psi_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$.

2. Estude o código disponibilizado na página da disciplina para a resolução do problema (P) pelo método dos elementos finitos e altere-o de forma a resolver o problema:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad : \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \;=\; f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0. \end{cases} \tag{P'}$$

   Teste a resolução numérica com $f(x) = -x^2 + x + 2$.