Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 4

Data de recepção: **07/11/2005**; Data de entrega: **21/11/2005** (na aula teórica)

1. Considere uma fórmula de quadratura interpolatória, para aproximação do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, da forma

$$I_1(f) \;=\; \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(\sqrt{3}/3).$$

   (a) Para que valores de α_0, α_1 e x_0 atinge esta fórmula o seu grau de exactidão máximo?

   (b) Considere $\alpha_1 = 0$. Para que valores de α_0 e x_0 atinge a fórmula $I_0(f) = \alpha_0 f(x_0)$ o seu grau de exactidão máximo?

   (c) Classifique as fórmulas que encontrou nas duas alíneas anteriores.

2. Considere as seguintes instruções em Matlab:

```
x      = (-128:128)'/128;
A      = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
[Q,R] = qr(A,0);
scale = Q(257,:);
Q      = Q*diag(1 ./scale);
plot(Q)
```

   (a) Execute este conjunto de instruções e explique, linha-a-linha, o seu significado.

   (b) Na mesma figura e nos mesmos 257 pontos do eixo das abcissas, trace os primeiros quatro polinómios de Legendre, $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ e $L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

   (c) Explique, matematicamente, a sobreposição (a menos de erros numéricos) dos gráficos ocorrida da alínea (a) para a alínea (b).

3. Prove as seguintes propriedades sobre os polinómios de Chebyshev:

   (a) $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x),\ k \geq 1.$ (Use as fórmulas aditivas das funções trigonométricas.)

   (b) $\|T_k(x)\|_\infty = 1$, $k \geq 0$.

4. Considere a função $f(x) = e^{i\ell x}$, com $\ell \in \mathbb{N}$ e o espaço vectorial com produto interno $L^2[0,1]$ dado na aula sobre aproximação trigonométrica. Suponha que $\ell \leq n$.

   (a) Mostre que f está em $L^2[0,1]$.

   (b) Calcule, sem efectuar quaisquer cálculos, a projecção ortogonal de f sobre o subespaço gerado pelos polinómios de Fourier $\phi_k(x)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Quanto vale o coeficiente de Fourier contínuo $\hat{f}_\ell$?

   (c) Quanto vale o coeficiente de Fourier discreto $\tilde{f}_\ell$ (com $N = 2n+1$)?