Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 5

Data de recepção: **21/11/2005**; Data de entrega: **07/12/2005** (na aula teórica)

1. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad : \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \;=\; f(x) & \text{se } \; x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0. \end{cases} \tag{P'}$$

   (a) Encontre a formulação variacional (V') deste problema, provando que se u for uma solução do problema de condições de fronteira (P') então u resolve o problema variacional (V').

   (b) Prove que se u for uma solução do problema variacional (V') e u'' existir e for contínua em $[0,1]$ então u resolve o problema de condições de fronteira (P').

   (c) Qual é o problema de minimização (M') associado ao princípio da energia potencial mínima?

   (d) Identifique o problema variacional (V'$_h$) (versão Galerkin do método dos elementos finitos).

   (e) Qual é o problema de minimização (M'$_h$) equivalente a (V'$_h$) (versão Ritz do método dos elementos finitos)?

   (f) Mostre que os problemas (V'$_h$) e (M'$_h$) são equivalentes.

2. Tente reproduzir, em Matlab, os resultados numéricos relatados na Aula 22, relativos à resolução numérica, pelo método dos elementos finitos, do problema (P) quando $f(x) = x^2$.

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira periódicas:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1), & u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Considere o intervalo $[0,1]$ discretizado na forma

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} = 1.$$

Seja u_k uma aproximação para $u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Faça $h = 1/(n-1)$.

(a) Com k a variar de 0 até $n-1$, escreva uma aproximação para $u''(x_k)$ recorrendo à fórmula das diferenças centrais de segunda ordem. Tome o simétrico desta aproximação e faça-o igual a $f(x_k)$. Reúna todas estas igualdades num sistema de equações lineares e escreva-o na sua forma matricial, fazendo $u_{-1} = u_{n-1}$ e $u_n = u_0$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(0) \\ f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((n-3)h) \\ f((n-2)h) \\ f(1) \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que a matriz deste sistema é circulante. Escreva os seus valores próprios no caso $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Como resolveria este sistema de forma eficiente?