Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

Trabalho 6

Data de recepção: **07/12/2005**; Data de entrega: **31/12/2005**

---

1. O método de Heun está associado ao método trapezoidal (também conhecido por método de Crank–Nicolson), cuja fórmula de actualização é dada por

$$u_{k+1} \; = \; u_k + \frac{h}{2} \left[f(t_k, u_k) + f(t_{k+1}, u_{k+1}) \right].$$

   Mostre que esta fórmula resulta da aplicação da fórmula de quadratura trapezoidal ao integral

$$y(t) - y(t_k) \; = \; \int_{t_k}^{t} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau.$$

   Este método é explícito ou implícito?

2. Mostre que a fórmula de actualização do método de Heun pode ser obtida da do método trapezoidal, substituindo $f(t_{k+1}, u_{k+1})$ por $f(t_{k+1}, u_k + hf(t_k, u_k))$, ou seja, utilizando a fórmula de actualização do método de Euler explícito para aproximar u_{k+1}. (O método de Heun pode ser encarado como um processo de tornar explícito o método trapezoidal.)

3. Prove que o método de Heun tem um erro de truncatura local de ordem 2:

$$\frac{R_{k+1}(h)}{h} \; = \; \mathcal{O}(h^2).$$

   Decomponha, primeiro, o erro $R_{k+1}(h)$ na soma dos erros

$$S_1^k(h) \; = \; y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2} \left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right]$$

   e

$$S_2^k(h) \; = \; \frac{h}{2} \left[f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)) \right].$$

   Ao erro $S_1^k(h)$ aplique o que conhece sobre o erro da fórmula de quadratura trapezoidal. O segundo erro $S_2^k(h)$, analise-o à luz do que sabe sobre o erro de truncatura local do método de Euler explícito.

4. Considere o método de Heun de terceira ordem (para problemas de valor inicial) definido por:

$$\begin{aligned}
F_k^1 &= f(t_k, u_k),\\
F_k^2 &= f(t_k + h/3, u_k + hF_k^1/3),\\
F_k^3 &= f(t_k + 2h/3, u_k + 2hF_k^2/3),\\
u_{k+1} &= u_k + h\left(\tfrac{1}{4}F_k^1 + \tfrac{3}{4}F_k^3\right),
\end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq n_h - 1$ e $u_0 = y_0$. Pode assumir que a função f é contínua à Lipschitz relativamente ao seu segundo argumento (com constante $L > 0$).

(a) Classifique este método (explícito/implícito, passo simples/passos múltiplos, Taylor/Runge–Kutta).

(b) Escreva a fórmula de actualização do método na forma $u_{k+1} = u_k + h\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h)$, identificando a sua função incremental.

(c) Mostre que, quando aplicado ao problema teste (I_λ), este método gera uma sequência da forma

$$u_{k+1} = \left(1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2 + (h\lambda)^3/6\right)^{k+1}, \qquad k \geq 0.$$

(d) Este método é $\mathcal{A}$–estável?