PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 12/06/01

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem-se consultar o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. A condição de decréscimo suficiente em métodos de procura unidireccional, dada por

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^\top p_k\,,\ c_1 \in (0,1),$$

desempenha um papel "semelhante" à condição

$$\frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m_k(0) - m_k(s_k)} \ \geq\ \eta\,,\ \eta \in (0, 1/4),$$

dos métodos de região de confiança, em que $m_k(s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top s + 1/2 s^\top B_k s$ e $B_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica.

Mostre que esta afirmação faz sentido, escolhendo, para o efeito, $B_k = 0$ em $m_k(s)$, e associando s_k a $\alpha_k p_k$.

2. Considere um método de procura unidireccional da forma $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ com α_k a satisfazer as condições de Wolfe e

$$p_k \ = \ - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}(x_k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que i_k é um índice para o qual $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_k)|$ assume o maior valor em $j \in \{1, \ldots, n\}$. Suponha que a função $f : N \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável no aberto N e que este contém $L(x_0)$. Suponha ainda que f é limitada inferiormente em $L(x_0)$ e que ∇f é contínua à Lipschitz em N.

   (a) Mostre que p_k é uma direcção de descida se $\nabla f(x_k) \neq 0$ e conclua que estamos nas condições de assegurar convergência global.

   (b) Prove que todo o ponto de acumulação de $\{x_k\}$ é estacionário.

v.s.f.f.

3. Considere o seguinte problema

$$\min \quad f(x) \quad \text{s.a.} \quad a_i \leq x_i \leq b_i\,,\; i = 1, \ldots, n\,,$$

em que $x, a, b \in \mathbb{R}^n$ e f é uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

(a) Escreva, no contexto deste problema, as condições necessárias de primeira e de segunda ordem, e comente a necessidade de impôr uma qualificação de restrições.

(b) Escreva, no contexto deste problema, as condições suficientes de segunda ordem.

(c) No caso em que existe complementaridade estrita, reescreva a parte de segunda ordem destas condições suficientes recorrendo a uma submatriz da Hessiana de f.

(d) Sejam, agora, $n = 2$, $a = (0,0)^\top$, $b = (1,1)^\top$ e $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + x_2$. Verifique, analiticamente e geometricamente, se são válidas em $(x_1^*, x_2^*) = (1,1)^\top$ as condições necessárias de primeira ordem. Verifique também, para este ponto (x_1^*, x_2^*), a validade das condições de segunda ordem.

4. Considere a fórmula de actualização do método BFGS que gera as aproximações simétricas $\{B_k\}$ em $\mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes Hessianas, dada por

$$B_{k+1} \;=\; B_k - \frac{1}{s_k^\top B_k s_k} B_k s_k s_k^\top B_k + \frac{1}{y_k^\top s_k} y_k y_k^\top\,.$$

(a) Mostre que se B_k é simétrica então B_{k+1} também é simétrica.

(b) Mostre que B_{k+1} satisfaz a equação da secante.

(c) Mostre que se B_k é definida positiva então B_{k+1} também é definida positiva. **Sugestão:** Considere a decomposição de Cholesky $B_k = L_k L_k^\top$ e faça $a = L_k^\top z$ e $b = L_k^\top s_k$ para um dado vector $z \in \mathbb{R}^n$ e prove que

$$z^\top \left(B_k - \frac{1}{s_k^\top B_k s_k} B_k s_k s_k^\top B_k \right) z \;\geq\; 0\,,$$

utilizando, para o efeito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz. De seguida considere a outra parcela, $\frac{1}{y_k^\top s_k} y_k y_k^\top$.