PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 12/06/02

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem-se consultar o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Considere o teorema da convergência local do método de Newton para a minimização de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com Hessiana contínua à Lipschitz num aberto N de $\mathbb{R}^n$ contendo o ponto x^*.
   Existem duas constantes, relacionadas com a função f, que influenciam a região de convergência local q-quadrática e a correspondente desigualdade na norma do erro absoluto de uma iteração para a seguinte. Quais são essas constantes e como é que essa influência é exercida?

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ em que a matriz Hessiana é não singular, considere a direcção $d(y)$ definida por
$$d(y) \;=\; -\nabla f(y) - \nabla^2 f(y)^{-1} \nabla f(y)\,.$$
   (a) Mostre que $d(y)$ é uma direcção de descida quando $\nabla^2 f(y)$ é definida positiva e $\nabla f(y) \neq 0$.

   (b) Mostre que $d(y)$ é uma direcção de descida se $\|\nabla^2 f(y)^{-1}\|_2 < 1$ e $\nabla f(y) \neq 0$.

   (c) Considere, agora, as funções reais de duas variáveis reais $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^2 + 4x_1x_2$ e $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^2$. Seja $y = (1, 1)^\top$. Calculando apenas $\nabla^2 f(y)$ e os seus valores próprios, mostre que $d(y)$ é, para ambas as funções, uma direcção de descida.

   (d) Em que outras situações, para além das descritas nas alíneas a e b, é que $d(y)$ é uma direcção de descida?

v.s.f.f.

3. Considere um problema de programação não linear com $|\mathcal{I}|$ restrições de desigualdade

$$\min\ f(x) \quad \text{s.a} \quad c_i(x) \geq 0,\ i \in \mathcal{I}\,,$$

em que todas as funções envolvidas são continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$. Considere uma sucessão de pontos $\{x_k\}$ em $\mathbb{R}^n$, a convergir para um ponto admissível x^*, em que x_k satisfaz

$$\nabla f(x_k) - \sum_{i \in \mathcal{A}(x_k)} \lambda_i^k \nabla c_i(x_k) \ = \ 0, \qquad \lambda_i^k \geq 0, i \in \mathcal{A}(x_k), \quad \lambda_i^k = 0, i \notin \mathcal{A}(x_k)\,,$$

para um dado $\lambda^k \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$.

(a) Mostre que quando o conjunto $\{\nabla c_i(x^*),\ i \in \mathcal{A}(x^*)\}$ é linearmente independente, ou seja, que quando a qualificação de restrições LICQ é satisfeita, o ponto x^* satisfaz as condições necessárias de primeira ordem.

(b) O que poderá dizer sobre x^* quando apenas se sabe ser verdadeira a qualificação de restrições de Mangasarian–Fromovitz (MFCQ)?

4. Considere o seguinte problema de programação não linear:

$$\min\ \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2 \quad \text{s.a} \quad x_1 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \geq 1\,.$$

(a) Identifique, geometricamente, a solução óptima do problema e confirme que esse minimizante global satisfaz as condições suficientes de segunda ordem.

(b) Repare, agora, no seguinte problema em x_1, x_2, e s:

$$\min\ \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2 - \mu\Big(\log(x_1) + \log(s)\Big) \quad \text{s.a} \quad x_1 + x_2 - s = 1\,,$$

em que μ é um parâmetro real positivo.

i. Escreva as condições necessárias de primeira ordem para este problema quando x_1 e s assumem valores positivos.

ii. Reescreva estas condições eliminando o multiplicador associado à restrição $x_1 + x_2 - s = 1$. Identifique, depois, aproximações para os multiplicadores associados às restrições $x_1 \geq 0$ e $x_1 + x_2 \geq 1$ do problema original.