PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 09/06/04

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

1. Considere um problema de optimização não linear sem restrições da forma $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, em que f é uma função continuamente diferenciável de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, e um método a gerar uma sucessão de pontos $\{x_k\}$ através da fórmula

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \alpha_k \nabla f(x_k),$$

com α_k a satisfazer a condição $f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -c_1 \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2$ (em que $c_1 \in (0,1)$).

   (a) Identifique esta condição.

   (b) Assuma, agora, que f é limitada inferiormente em $L(x_0)$. Prove que $\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$ se $\alpha_k \geq \alpha_{min} > 0$ para todo o k.

   (c) Que outra condição asseguraria um comportamento do tipo $\alpha_k \geq \alpha_{min} > 0$ para todo o k?

2. Considere, novamente, um problema de optimização não linear sem restrições da forma $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, com f continuamente diferenciável de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$.

   (a) No contexto dos métodos de quasi-Newton, mostre que

$$B_{k+1} \;=\; \frac{y_k^\top s_k}{s_k^\top B_k s_k} B_k$$

   satisfaz a equação de secante

$$s_k^\top B s_k \;=\; y_k^\top s_k \qquad (B \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

   com $s_k = x_{k+1} - x_k$ e $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

   (b) Considere um método, que se assume bem definido, da forma $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ com $p_k = -B_k^{-1} \nabla f(x_k)$, $B_0 = I$ e α_k a satisfazer as condições de Wolfe. Qual é o método que estudou para este problema que mais se assemelha a este?

   (c) Com a escolha $B_0 = I$, escreva B_1 (assumindo $x_1 \neq x_0$). Mostre que B_1 é uma matriz definida positiva se f for estritamente convexa.

v.s.f.f.

3. Considere o problema de programação não linear

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.a} \quad x \geq 0$$

com f uma função duas vezes continuamente diferenciável de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$.

(a) Escreva a função de barreira logarítmica $P(x;\mu)$ para este problema e os seus gradiente $\nabla_x P(x;\mu)$ e Hessiana $\nabla^2_{xx} P(x;\mu)$ em ordem a x. Identifique o mau condicionamento do sistema que determina o passo de Newton, $\nabla^2_{xx} P(x;\mu)\Delta x = -\nabla_x P(x;\mu)$, quando uma das componentes de x se aproxima de zero (ou seja, quando x se aproxima da fronteira de $\{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$).

(b) Seja D a matriz diagonal cujos elementos diagonais são as componentes de x. Multiplique a equação da alínea anterior por D e faça a mudança de variável $\Delta x = D\widehat{\Delta x}$ (assumindo que todas as componentes de x são positivas). Verifique que o novo sistema apresenta uma matriz simétrica e que o mau condicionamento mencionado na alínea anterior já não se manifesta.

(c) Mostre que num ponto x para o qual $x \geq 0$ e $\nabla f(x) \geq 0$, as condições necessárias de primeira ordem para este problema se resumem a $D\nabla f(x) = 0$.

4. Considere o seguinte problema de optimização não linear:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}(x_2+1)^2 \quad \text{s.a} \quad e^{x_1} - x_2 - 2 \geq 0,\ e^{x_1} + x_2 \geq 0.$$

(a) À luz dos teoremas de existência e unicidade de minimizantes, o que poderia afirmar sobre este problema?

(b) Mostre que o ponto $(0,-1)^\top$ satisfaz as condições necessárias de primeira ordem e escreva o conjunto F e o cone F_1 para este ponto.

(c) Mostre que o ponto $(0,-1)^\top$ satisfaz as condições suficientes de segunda ordem.

(d) Prove que o ponto $(0,-1)^\top$ é o minimizante global. (Sugestão: averigúe que não existe mais nenhum ponto a satisfazer as condições necessárias de primeira ordem.)