PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 20/06/00

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem ser utilizados o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Considere o sistema de equações não lineares:

$$r(x) \;=\; 0$$

em que a função $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável. Seja $J(x)$ a sua matriz Jacobiana.

(a) Mostre que a direcção $-J(x)^{-1}r(x)$ é de descida para a função

$$f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2 = \frac{1}{2}r(x)^T r(x).$$

(b) Seja $\{x_k\}$ a sucessão definida por

$$x_{k+1} = x_k + p_k, \quad \text{em que} \quad J(x_k)p_k = -r(x_k).$$

Assuma que $\{x_k\}$ converge para x^* tal que $J(x^*)$ é não singular e que J é contínua à Lipschitz num aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo x^*. Demonstre que

i. $r(x^*) = 0$;

ii. a taxa de convergência local é q-quadrática.
(Utilize o facto de $r(x_k) - r(x^*) = \int_0^1 J(x^* + t(x_k - x^*))(x_k - x^*)\, dt$.)

(c) Considere agora o método quasi-Newton (designado por método de Broyden) definido iterativamente por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - A_k^{-1}r(x_k), \\ s_k &= x_{k+1} - x_k, \\ y_k &= r(x_{k+1}) - r(x_k), \\ A_{k+1} &= A_k + \tfrac{(y_k - A_k s_k)s_k^T}{s_k^T s_k}, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ (em que $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz não singular e $x_0 \in \mathbb{R}$).

i. Mostre que A_{k+1} satisfaz a equação de secante $As_k = y_k$.

ii. Demonstre que A_{k+1} é a solução óptima do problema

$$\min_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \|A - A_k\|_2^2 \quad \text{s.a.} \quad As_k = y_k.$$

iii. Mostre que se A_{k+1} satisfaz a equação de secante e $A_{k+1} = A_k + u_k v_k^T$ então

$$A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k)v_k^T}{v_k^T s_k}.$$

(Conclua então que o método de Broyden resulta de $v_k = s_k$.)

2. Considere o problema de região de confiança

$$\min_{p\in\mathbb{R}^n} \; g^T p + \frac{1}{2}p^T Bp \quad \text{s.a.} \quad \|p\|_2 \leq \Delta,$$

com $g \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = B^T$ e $\Delta > 0$.

(a) Escreva as condições necessárias de primeira e de segunda ordem deste problema. **Atenção:** Reescreva primeiro $\|p\|_2 \leq \Delta$ na forma $\Delta^2 - \|p\|_2^2 \geq 0$ e designe por λ o multiplicador associado a esta restrição. Indique em que condições é que a hipótese LICQ (independência linear dos gradientes das restrições activas) é satisfeita.

(b) Reescreva as condições determinadas na alínea anterior de forma a poder compará-las com as condições que caracterizam a solução óptima do PRC.

(c) Sejam agora $n = 3$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i. Escreva por extenso a função racional $\|p(\lambda)\|_2^2 = \| -(B + \lambda I)^{-1} g\|_2^2$.

ii. Considere $g_2 = 1$ e mostre, geometricamente, como pode ser obtida a solução óptima deste PRC.

iii. Considere $g_2 = 0$ e indique o valor de Δ que separa o caso fácil do difícil.

3. Considere o problema

$$\min \; -x^2 \quad \text{s.a.} \quad 1 - x^2 \geq 0.$$

(a) Mostre que a função de barreira logarítmica $P(x;\mu)$ tem um minimizante $x = 0$ se $\mu > 1$ e dois minimizantes $x = \pm\sqrt{1-\mu}$ se $\mu < 1$. Que tipo de ponto é $x = 0$ quando $\mu < 1$?

(b) Seja $\{\mu_k\}$ uma sucessão de parâmetros de barreira menores do que um a convergir para zero. Seja ainda $x_k = (-1)^k\sqrt{1-\mu_k}$ uma sucessão de minimizantes de $P(x;\mu_k)$.

i. Verifique que as subsucessões $\{x_{2k+1}\}$ e $\{x_{2k}\}$ convergem para pontos de acumulação diferentes, ambos soluções do problema original.

ii. Acha que o método da barreira logarítmica oscilaria da mesma forma? Porquê? Qual é a componente deste método que impediria esse comportamento?