PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 10/07/01

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem-se consultar o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e considere a mudança de variáveis:

$$x \;=\; Ry\,, \quad \text{em que } R \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ é uma matriz não singular.}$$

Considere a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f(Ry)$.

(a) Mostre que o método de Newton é invariante ao escalonamento nas variáveis, ou seja, que as fórmulas $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ e $y_{k+1} = y_k - \alpha_k \nabla^2 g(y_k)^{-1}$ $\nabla g(y_k)$ são equivalentes.

(b) Mostre que o método da descida máxima é invariante ao escalonamento ortogonal nas variáveis, ou seja, que quando a matriz R é ortogonal é possível provar uma equivalência do género da da alínea anterior (em que a direcção de Newton é substituída pela de descida máxima).

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em que $\nabla^2 f$ é contínua à Lipschitz em $\mathbb{R}^n$ (com constante $L > 0$).

Considere um método de região de confiança baseado no modelo quadrático

$$m_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top s + 1/2 s^\top \nabla^2 f(x_k) s\,.$$

A finalidade deste exercício é provar que, para um dado x_k tal que $\nabla f(x_k) \neq 0$, é sempre possível encontrar um Δ_k tal que

$$\rho_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m_k(0) - m_k(s_k)} \;\geq\; \eta\,,\; \eta \in (0, 1/4)\,.$$

Sugestão: Analise $|\rho_k - 1|$ e utilize a propriedade $m_k(0) - m_k(s_k) \geq 1/2 a \min\{\Delta_k, a/b\}$, em que $a = \|\nabla f(x_k)\|$ e $b = \|\nabla^2 f(x_k)\|$. Note que x_k se supõe constante (ou seja que o passo s_k vai sendo rejeitado) à medida que o valor de Δ_k diminui, até que a condição $\rho_k \geq \eta$ seja satisfeita.

v.s.f.f.

3. Considere o seguinte problema

$$\min \quad -b^\top x \quad \text{s.a.} \quad x^\top Q x \leq 1\,,$$

em que $x, b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ e $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica e definida positiva.

(a) Escreva, no contexto deste problema, as condições necessárias de primeira ordem, e comente a necessidade de impôr uma qualificação de restrições.

(b) Seja x^* um ponto a verificar as condições necessárias de primeira ordem. Seja λ^* o correspondente multiplicador.

i. Mostre que $\lambda^* = \frac{1}{2}(x^*)^\top b$.

ii. Prove que a função objectivo em x^* vale $-\sqrt{b^\top Q^{-1} b}$.

(c) Prove, através das condições suficientes de segunda ordem, que um ponto que verifica as condições necessárias de primeira ordem é um minimizante local estrito.

4. Considere o seguinte problema

$$\min \quad f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_1^2 + x_2^2) \quad \text{s.a.} \quad -x_1 + 1 = 0\,.$$

(a) Escreva a função Lagrangeana aumentada $L_A(x, \lambda; 1/c)$, em que o parâmetro μ é substituído por $1/c$, com $c \in]0, +\infty]$. (Note que fazer $\mu \to 0^+$ corresponde a fazer $c \to +\infty$.)

(b) Escreva o gradiente e a Hessiana de $L_A(x, \lambda; 1/c)$ em ordem a x e conclua que a Hessiana $\nabla^2_{xx} L_A(x, \lambda; 1/c)$ é mal condicionada quando $c \to +\infty$.

(c) Verifique que este problema tem solução óptima (minimizante global) única em $(x_1^*, x_2^*) = (1, 0)^\top$ (e que o correspondente multiplicador é $\lambda^* = 1$).

(d) Mostre que quando $c_k > 1$,

$$x_k = \left(\frac{c_k - \lambda^k}{c_k - 1}, 0\right)^\top$$

é a solução óptima de $\min_{x\in\mathbb{R}} L_A(x, \lambda^k; 1/c_k)$.

(e) Demonstre que quando $c_k > 1$, a fórmula para actualizar os multiplicadores do método de Lagrangeano aumentado é dada por

$$\lambda^{k+1} = -\frac{\lambda^k}{c_k - 1} + \frac{c_k}{c_k - 1}$$

e que, introduzindo $\lambda^* = 1$, se obtém

$$\lambda^{k+1} - \lambda^* = -\frac{\lambda^k - \lambda^*}{c_k - 1}\,.$$

O que é que conclui a partir desta expressão relativamente à taxa de convergência de $\{\lambda^k\}$?