PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 05/07/04

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Considere um método iterativo, para minimizar uma função f, cujo passo é baseado na resolução do seguinte problema de região de confiança:

$$\min_{\bar{s}\in\mathbb{R}^n} \; c_k + g_k^\top \bar{s} + \frac{1}{2}\bar{s}^\top H_k \bar{s} \quad \text{s.a} \quad \|D_k \bar{s}\| \leq \Delta_k,$$

em que $c_k = f(x_k)$, $g_k = \nabla f(x_k)$ e H_k é uma matriz simétrica de ordem n. Assuma que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, que Δ_k é um real positivo e que D_k é uma matriz n-por-n não singular.

   (a) Escreva um problema equivalente a este mas colocado nas variáveis $s = D_k \bar{s}$.

   (b) Escreva a condição de decréscimo de Cauchy para o problema de região de confiança da alínea (a).

   (c) Sabendo que a aproximação da Hessiana deve ser uniformemente limitada para que o método de região de confiança seja globalmente convergente para pontos estacionários, a que condição é que a sucessão $\{D_k\}$ deveria obedecer para se atingisse este objectivo?

   (d) Com base na alínea (b) seria possível provar que $\lim_{k\to+\infty} D_k^{-1}\nabla f(x_k) = 0$. Qual seria a condição a impor a $\{D_k\}$ para que se obtivesse $\lim_{k\to+\infty} \nabla f(x_k) = 0$?

2. Considere o problema $\min_{u\in\mathbb{R}^{n_u}} f(y(u), u)$ em que $f : \mathbb{R}^{n_y+n_u} \to \mathbb{R}$ e $c : \mathbb{R}^{n_y+n_u} \to \mathbb{R}^{n_y}$ são funções duas vezes continuamente diferenciáveis e a matriz Jacobiana parcial de c em ordem a y, $c_y(y, u)$, é não singular em $\mathbb{R}^{n_y+n_u}$. Assuma que $y(u)$ satisfaz $c(y(u), u) = 0$ para todo o $u \in \mathbb{R}^{n_u}$. (Nas aulas foram considerados problemas de controlo óptimo discretizados com esta estrutura. A notação é a mesma.)

   (a) Seja $\{u_k\}$ uma sucessão gerada a partir de $u_{k+1} = u_k + \Delta u_k$, em que:
   (i) $\nabla^2_{xx} L_k \Delta x_k + \nabla_x L_k$ é ortogonal ao espaço nulo da matriz Jacobiana de c em $(y(u_k), u_k)$, com as derivadas do Lagrangeano L a serem calculadas em $(y(u_k), u_k, \lambda(u_k))$;
   (ii) $\Delta x_k = W(y(u_k), u_k)\Delta u_k$ com

$$W(y, u) \;=\; \begin{pmatrix} -c_y(y, u)^{-1} c_u(y, u) \\ I_{n_u} \end{pmatrix}.$$

   Diga por que motivo é que uma sucessão assim gerada converge q-quadraticamente para um ponto a satisfazer as condições suficientes de segunda ordem deste problema, se u_0 estiver suficiente próximo deste ponto. **v.s.f.f.**

(b) Mostre que a condição de q-superlinearidade de Dennis-Moré se pode escrever na forma

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\left\| W_k^\top \left(\nabla^2_{xx} L_k - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \right) W_k \Delta u_k \right\|}{\|\Delta u_k\|} = 0,$$

com $W_k = W(y(u_k), u_k)$.

3. Considere um problema de programação não linear com restrições de igualdade

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.a} \quad h(x) = 0,$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são funções duas vezes diferenciáveis $(m < n)$.

(a) Mostre que as condições necessárias de primeira ordem para este problema são equivalentes a $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ e $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$, em que $L(x, \lambda)$ é a função Lagrangeana.

(b) Mostre que a linearização destas condições resulta no sistema de equações lineares:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x, \lambda) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

(c) Escreva as condições necessárias de primeira ordem do seguinte problema:

$$\min_{\Delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x)^\top \Delta x + \Delta x^\top \nabla^2_{xx} L(x, \lambda) \Delta x \quad \text{s.a} \quad \nabla h(x)^\top \Delta x + h(x) = 0.$$

Designe por λ^+ os multiplicadores destas condições.

(d) Prove que $\lambda^+ = \lambda + \Delta\lambda$, em que λ^+ são os multiplicadores da alínea (c) e $\Delta\lambda$ é o passo da alínea (b).

4. Considere o problema $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; x_2 \quad \text{s.a} \quad x_1^2 - x_2 = 0$.

(a) À luz dos teoremas de existência e unicidade de minimizantes, o que poderia afirmar sobre este problema?

(b) Seja $Q(x; \mu)$ a função de penalização quadrática. Indique uma expressão (em função de μ) para os pontos estacionários desta função.

(c) Seja, agora, $L_A(x, \mu; \lambda)$ a função de Lagrangeano aumentado. Repita o processo da alínea (b), calculando os pontos estacionários desta função, como expressões de μ e de λ.

(d) Mostre que se λ for negativo o ponto estacionário em (c) está mais perto da solução do problema do que o ponto estacionário em (b).

(e) Verifique que λ^+ é negativo se resultar da actualização do método de multiplicadores (com $x_1 = \lambda = 0$ e $x_2 < 0$).