PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 13/07/00

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem ser utilizados o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Mostre que as condições de Wolfe (CW) são invariantes ao escalonamento. Ou seja, mostre que se $f(x)$ for uma função continuamente diferenciável e as CW forem satisfeitas em x_k, então também são satisfeitas em x_k para a função $\alpha f(x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Conclua que o método de Newton com procura unidireccional através das CW é invariante ao escalonamento.

2. O método de Newton modificado (com procura unidireccional) e o método de região de confiança estão intimamente relacionados. Dada uma função duas vezes continuamente diferenciável, considere o seguinte modelo quadrático modificado

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} \quad \bar{m}_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k) p + \frac{\lambda_k}{2} p^T E_k p,$$

em que $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e definida positiva.

Calculando o gradiente $\nabla \bar{m}_k(p)$ e igualando-o ao vector nulo, relacione este modelo quadrático com:

(a) o método de Newton modificado (faça $\lambda_k = 1$);

(b) o método de região de confiança (faça $E_k = I$).

Sejam agora $n = 2$ e $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$.

(c) Mostre que esta função apresenta um único mínimo em $(0, 0)$.

(d) Qual é o número de condição de $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ quando $x_1 < 1/\sqrt{6}$? O que acontece ao número de condição quando x_1 se aproxima de zero?

(e) Que método escolheria para minimizar uma função com este condicionamento? Justifique.

v.s.f.f.

3. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e um ponto x^* nas condições do teorema que garante a taxa de convergência local q-quadrática do método de Newton. Considere o método BFGS com um tamanho de passo definido por $\alpha_k = 1$, a gerar uma sucessão $\{x_k\}$ a convergir para x^*.

   (a) O que é que pode dizer sobre a convergência da sucessão $\{B_k\}$ das matrizes geradas pelo método BFGS?

   (b) O que é que pode dizer sobre a convergência de $\{x_k\}$?

4. Considere o seguinte problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x) \quad \text{s.a.} \quad Ax = b,$$

   com $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$ e f uma função duas vezes continuamente diferenciável.

   (a) Escreva as condições necessárias de primeira e de segunda ordem deste problema. Diga se é necessário ou não impor uma restrição de qualificação.

   (b) Escreva as condições suficientes de segunda ordem deste problema. Seja Z uma matriz cujas colunas geram o espaço nulo de A. Reescreva estas condições recorrendo à matriz Hessiana projectada.

   (c) Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Mostre que as condições necessárias de primeira ordem se resumem a $Z^T \nabla f(x) = 0$.

   (d) Mostre que a linearização de $Z^T \nabla f(x) = 0$ e a manutenção da admissibilidade dos iterandos conduz ao método

$$x_{k+1} = x_k + Z u_k, \qquad Z^T \nabla^2 f(x_k) Z u_k = -Z^T \nabla f(x_k),$$

   com $Ax_0 = b$.