Programação Não Linear

Ano Lectivo 2000/01

Trabalho 1: Teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

Data de recepção: **22/02/2001**; Data de entrega: **08/03/2001**

Exercícios sobre teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

1. Mostre que o conjunto dos minimizantes globais de uma função convexa é convexo.

2. Prove que se uma função for estritamente convexa e existir um minimizante local então ela possui um único minimizante global.

3. [**Optimização com restrições.**] Prove que uma região admissível definida algebricamente por funções c_i $(i \in \mathcal{E})$ afins e por funções c_i $(i \in \mathcal{I})$ côncavas é um conjunto convexo.

4. [**Problemas de mínimos quadrados não lineares.**] Considere a função

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\|r(x)\|^2 \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} r_j(x)^2,$$

em que $m > n$ e as m funções $r_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas vezes continuamente diferenciáveis. Seja ainda $J(x)$ a matriz cujas linhas são dadas pelos m gradientes das funções r_j.

(a) Mostre que, se $J(x)^\top r(x) \neq 0$, $-J(x)^\top r(x)$ é uma direcção de descida para a função f.

(b) Confirme que quando $r(x) = 0$ a matriz Hessiana de f é dada por

$$\sum_{j=1}^{m} \nabla r_j(x) \nabla r_j(x)^\top = J(x)^\top J(x).$$

Mostre que, se $r(x) = 0$ e $J(x)$ tiver característica n, então o ponto x verifica as condições suficientes de segunda ordem.

5. [**Sistemas de equações não lineares.**] Considere o sistema de equações não lineares:

$$r(x) \;=\; 0,$$

em que a função $r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável. Assuma que a matriz Jacobiana de r em x, $J(x)$, é não singular. Mostre que a direcção $-J(x)^{-1} r(x)$ é de descida para a função $f(x) = 1/2\|r(x)\|^2$.

6. Mostre que a sucessão $\{1/k\}$ não converge para 0 q-linearmente.

7. Prove que a sucessão $\{1 + (0.5)^{2^k}\}$ apresenta uma taxa de convergência q-quadrática para 1.

8. Estude a taxa de convergência da sucessão $\{x_k\}$ definida por $(0.5)^{2^k}$ se k for par e x_{k-1}/k se k for ímpar.

Em caso de omissão utilizam-se as convenções e notações do Livro J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

Exercícios de iniciação ao Matlab

Estes exercícios têm por objectivo iniciar a utilização do pacote de *software* Matlab, desenvolvido para Cálculo Científico e Análise e Álgebra Linear Numéricas.

O Matlab é uma marca registada pela The MathWorks, Inc. (endereço de correio electrónico `info@mathworks.com` e endereço na *Web* `http://www.mathworks.com`). O comando `help` pode ser utilizado para descobrir o modo de utilização de qualquer outro comando. Executando o comando `doc` tem-se acesso a uma página contendo o manual de utilização.
Para cada exercício, entregue as funções que forem pedidas e o diário da sua sessão de Matlab. O diário pode ser gravado num ficheiro através do comando `diary`. Utilize `format compact` para poupar espaço. Utilize também `format long`, a fim de o conhecer.

1. Execute os seguintes comandos em Matlab:

```
x     = (-128:128)'/128;
A     = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
[Q,R] = qr(A,0);
scale = Q(257,:);
Q     = Q*diag(1 ./scale);
plot(Q)
```

   (a) Explique o que é que a execução de cada comando está a realizar.

   (b) Trace na mesma figura e nos mesmos 257 pontos do eixo das abcissas os primeiros quatro polinómios de Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ e $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

   (c) Calcule as normas ℓ_2 dos vectores erro obtidos subtraindo as quatro colunas de Q aos respectivos quatro vectores utilizados em (b). Como é que está feita a distribuição do erro ao longo das 257 componentes de cada vector erro?

2. Considere a função
$$f(x_1, x_2) \;=\; (x_1 + x_2^2)^2.$$

   (a) Escreva funções para calcular o valor de f, do seu gradiente e da sua Hessiana.

   (b) Confirme, chamando uma destas funções, que $p^\top = (-1, 1)$ é uma direcção de descida de f em $x^\top = (1, 0)$.

   (c) Calcule a direccção de Newton para f em $x^\top = (1, 0)$ e confirme, recorrendo à direcção de descida máxima, que se trata de uma direcção de descida.