Programação Não Linear

Ano Lectivo 2001/02

Trabalho 1: Teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

Data de recepção: **26/02/2002**; Data de entrega: **15/03/2002**

Exercícios sobre teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

1. Mostre que qualquer combinação linear com coeficientes positivos de um número finito de funções convexas num domínio convexo é também uma função convexa nesse domínio.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e considere a mudança de variáveis:
$$x \; = \; Ry\,, \quad \text{em que } R \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ é uma matriz não singular.}$$
Considere a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f(Ry)$.

   (a) Mostre que o método de Newton é invariante ao escalonamento nas variáveis, ou seja, que as fórmulas $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ e $y_{k+1} = y_k - \alpha_k \nabla^2 g(y_k)^{-1} \nabla g(y_k)$, com $\alpha_k > 0$, são equivalentes.

   (b) Mostre que o método da descida máxima é invariante ao escalonamento ortogonal nas variáveis, ou seja, que quando a matriz R é ortogonal é possível provar uma equivalência do género da da alínea anterior (em que a direcção de Newton é substituída pela de descida máxima).

3. **[Problemas de mínimos quadrados não lineares.]** Considere a função
$$f(x) \; = \; \frac{1}{2}\|r(x)\|^2 \; = \; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} r_j(x)^2,$$
em que $m > n$ e as m funções $r_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas vezes continuamente diferenciáveis. Seja ainda $J(x)$ a matriz cujas linhas são dadas pelos m gradientes das funções r_j.

   (a) Mostre que, se $J(x)^\top r(x) \neq 0$, $-J(x)^\top r(x)$ é uma direcção de descida para a função f.

   (b) Confirme que quando $r(x) = 0$ a matriz Hessiana de f é dada por
$$\sum_{j=1}^{m} \nabla r_j(x) \nabla r_j(x)^\top = J(x)^\top J(x).$$
   Mostre que, se $r(x) = 0$ e $J(x)$ tiver característica n, então o ponto x verifica as condições suficientes de segunda ordem.

4. Mostre que a sucessão $\{1 + 10^{-k}\}$ converge para 1 q-linearmente.

5. Prove que a sucessão $\{x_k\}$ definida por $x_{k+1} = 1/2(x_k + 4/x_k)$ e $x_0 = 4$ converge para 2 q-quadraticamente.

6. Estude a taxa de convergência local da sucessão $\{3^{-k^2}\}$.

Em caso de omissão utilizam-se as convenções e notações do Livro J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

Exercícios de iniciação ao MATLAB

Estes exercícios têm por objectivo iniciar a utilização do pacote de *software* MATLAB, desenvolvido para Cálculo Científico e Análise e Álgebra Linear Numéricas.

O MATLAB é uma marca registada pela The MathWorks, Inc. (endereço de correio electrónico `info@mathworks.com` e endereço na *Web* `http://www.mathworks.com`). O comando `help` pode ser utilizado para descobrir o modo de utilização de qualquer outro comando. Executando o comando `doc` tem-se acesso a uma página contendo o manual de utilização.
Para cada exercício, entregue as funções que forem pedidas e o diário da sua sessão de MATLAB. O diário pode ser gravado num ficheiro através do comando `diary`. Utilize `format compact` para poupar espaço. Utilize também `format long`, a fim de o conhecer.

1. Execute os seguintes comandos em MATLAB:

```
x     = (-128:128)'/128;
A     = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
[Q,R] = qr(A,0);
scale = Q(257,:);
Q     = Q*diag(1 ./scale);
plot(Q)
```

   (a) Explique o que é que a execução de cada comando está a realizar.

   (b) Trace na mesma figura e nos mesmos 257 pontos do eixo das abcissas os primeiros quatro polinómios de Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ e $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

   (c) Calcule as normas ℓ_2 dos vectores erro obtidos subtraindo as quatro colunas de Q aos respectivos quatro vectores utilizados em (b). Como é que está feita a distribuição do erro ao longo das 257 componentes de cada vector erro?

2. Considere a função

$$f(x_1, x_2) \;=\; (x_1 + x_2^2)^2.$$

   (a) Escreva funções para calcular o valor de f, do seu gradiente e da sua Hessiana.

   (b) Confirme, chamando uma destas funções, que $p^\top = (-1, 1)$ é uma direcção de descida de f em $x^\top = (1, 0)$.

   (c) Calcule a direccção de Newton para f em $x^\top = (1, 0)$ e confirme, recorrendo à direcção de descida máxima, que se trata de uma direcção de descida.