Programação Não Linear

Ano Lectivo 2000/01

Trabalho 3: Métodos de região de confiança

Data de recepção: **02/04/2001**; Data de entrega: **23/04/2001**

Considere o problema de região de confiança PRC(Δ):

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} \qquad m(p) \stackrel{\text{def}}{=} f + g^\top p + \frac{1}{2} p^\top B p \quad \text{s.a.} \quad \|p\| \leq \Delta\,,$$

em que Δ é um real positivo, f é um real, g é um vector em $\mathbb{R}^n$ e B é uma matriz $n \times n$ real e simétrica.

O **Teorema 4.3** diz que p^* é minimizante global do PRC(Δ) **se e só se** existir um parâmetro $\lambda \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} &(B + \lambda I)p^* = -g\,, \\ &\lambda(\Delta - \|p^*\|) = 0 \quad \text{e} \\ &B + \lambda I \quad \text{é semi-definida positiva.} \end{aligned}$$

Se $B + \lambda I$ for não singular (neste caso, definida positiva) então o minimizante global é único.

Prova-se também que o problema PRC(Δ) não tem nenhum minimizante p^* com $\|p^*\| = \Delta$ se e só se B for definida positiva e $\|B^{-1}g\| < \Delta$.

As condições necessárias do **Teorema 4.3** serão demonstradas quando forem introduzidas as condições necessárias de primeira e de segunda ordem gerais para problemas de optimização não linear com restrições. Chama-se a atenção para o facto das condições do **Teorema 4.3** serem também suficientes, mesmo num contexto não convexo, uma vez que nada é assumido sobre o sinal dos valores próprios de B.

1. Caracterize p^*.

2. Suponha que $B + \lambda I$ é sempre não singular para todo o $\lambda \geq 0$. Prove que

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) \ = \ 0 \quad \text{e} \\ &\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{d^\top p(\lambda)}{\|p(\lambda)\|} \ = \ 0 \quad \text{quando} \quad d^\top g = 0\,. \end{aligned}$$

   Represente geometricamente o arco descrito por $p(\lambda)$ de 0 a $+\infty$.

Em caso de omissão utilizam-se as convenções e notações do Livro J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.