# Programação Não Linear

Ano Lectivo 2000/01

**Trabalho 4**: Métodos de quasi-Newton

Data de recepção: **26/04/2001**; Data de entrega: **10/05/2001**

1. Considere a actualização do método de quasi-Newton PSB (*Powell-symmetric-Broyden*):

$$B_{k+1} \;=\; B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)s_k^\top + s_k(y_k - B_k s_k)^\top}{s_k^\top s_k} - \frac{(y_k - B_k s_k)^\top s_k}{(s_k^\top s_k)^2} s_k s_k^\top \,.$$

Prove que $B_{k+1}$ é a solução óptima única de

$$\min_{B \in \mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|B - B_k\|_F \quad \text{s.a.} \quad B = B^\top \quad \text{e} \quad Bs_k = y_k \,,$$

através dos seguintes passos:

(a) Em primeiro lugar, prove que $B_{k+1}$ é simétrica e que satisfaz a equação da secante $Bs_k = y_k$.

(b) De seguida, mostre que

$$\|(B_{k+1} - B_k)r\|_2 \;\le\; \|(B - B_k)r\|_2 \;,$$

quaisquer que sejam a matriz $B$ simétrica a satisfazer a equação da secante e o vector $r \in \mathbb{R}^n$ a verificar $r^\top s_k = 0$. Note que

$$\left\| \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top s_k} \right\|_F = 1$$

e que $\|Av\|_2 \le \|A\|_F \|v\|_2$.

(c) Mostre, depois, que

$$\|B_{k+1} - B_k\|_F^2 \;\le\; \|B - B_k\|_F^2 \;,$$

qualquer que seja a matriz $B$ simétrica a satisfazer a equação da secante. Demonstre, primeiro, as propriedades:

$$\|A\|_F^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^\top A) \qquad \text{e} \qquad \|AQ\|_F^2 = \|A\|_F^2 \,,$$

em que $Q$ representa uma matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

---

Em caso de omissão utilizam-se as convenções e notações do Livro J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

**Exercícios de** MATLAB

Os códigos mencionados em baixo foram escritos pelo professor da disciplina, em Matlab, e com uma finalidade pedagógica no âmbito da disciplina.
Para cada exercício, entregue as funções que forem pedidas e o diário da sua sessão de MATLAB. O diário pode ser gravado num ficheiro através do comando `diary`. Utilize `format compact` para poupar espaço.

1. Leia, tente compreender e execute os códigos escritos em MATLAB para a minimização da função do exercício 4.3 do livro Nocedal e Wright). Os códigos estão disponíveis em

   `http://www.mat.uc.pt/~lvicente/pnl/e4ponto3.tar.gz`

   (a) Compare o método de Newton e o método BFGS, ambos implementados no código, para $n = 10$, $n = 100$ e $n = 200$ e explique os resultados obtidos.

   (b) Para $n = 10$, corra o método BFGS e o método BFGS com procura unidireccional, com e sem a alteração (8.20). Explique os resultados obtidos.