Programação Não Linear

Ano Lectivo 1999/00

Exercício incluído no terceiro trabalho

Seja $\|\cdot\|$ uma norma matricial em $\mathbb{R}^{n\times n}$ consistente (ou seja que verifica $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$) e tal que $\|I\| = 1$.

Seja ainda $\|\cdot\|$ uma norma vectorial em $\mathbb{R}^n$ consistente com esta norma matricial (ou seja tal que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ quaisquer que sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$).

1. Seja $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Prove que se $\|E\| < 1$ então $I - E$ é não singular e

$$\|(I-E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|E\|}.$$

Sugestão: Prove primeiro, por contradição, que $I - E$ é não singular. Depois, defina

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} E^j$$

e mostre que

$$S_k - (I-E)^{-1} = -(I-E)^{-1}E^{k+1}$$

e

$$(I-E)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} E^k.$$

2. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ duas matrizes tais que A é não singular e $\|A^{-1}(B-A)\| < 1$. Demonstre que B é também não singular e

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}(B-A)\|}.$$

Sugestão: Utilize o resultado provado em 1.