A Matemática e as Finanças da Matemática Financeira

Luís Nunes Vicente[1]

[1]Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

O que é a Matemática Financeira?

Definição

É um conjunto de técnicas matemáticas que encontra aplicação em Finanças, em particular em:

- atribuição de preços a derivados financeiros,
- hedging (operações de cobertura ou protecção),
- gestão do risco,
- selecção de carteiras.

O que é a Matemática Financeira?

Definição

É um conjunto de técnicas matemáticas que encontra aplicação em Finanças, em particular em:

- atribuição de preços a derivados financeiros,
- hedging (operações de cobertura ou protecção),
- gestão do risco,
- selecção de carteiras.

O que é a Matemática Financeira?

Definição

É um conjunto de técnicas matemáticas que encontra aplicação em Finanças, em particular em:

- atribuição de preços a derivados financeiros,
- hedging (operações de cobertura ou protecção),
- gestão do risco,
- selecção de carteiras.

O que é a Matemática Financeira?

Definição

É um conjunto de técnicas matemáticas que encontra aplicação em Finanças, em particular em:

- atribuição de preços a derivados financeiros,
- hedging (operações de cobertura ou protecção),
- gestão do risco,
- selecção de carteiras.

O que é a Matemática Financeira?

Definição

É um conjunto de técnicas matemáticas que encontra aplicação em Finanças, em particular em:

- atribuição de preços a derivados financeiros,
- hedging (operações de cobertura ou protecção),
- gestão do risco,
- selecção de carteiras.

Técnicas matemáticas mais relevantes em Matemática Financeira:

- Probabilidades e Estatística, Processos Estocásticos.
- Análise/Cálculo Estocástico.
- Equações Diferenciais (EDPs).
- Optimização e Teoria do Controle.

Tempo e Incerteza

Técnicas matemáticas mais relevantes em Matemática Financeira:

- Probabilidades e Estatística, Processos Estocásticos.
- Análise/Cálculo Estocástico.
- Equações Diferenciais (EDPs).
- Optimização e Teoria do Controle.

Tempo e Incerteza

Técnicas matemáticas mais relevantes em Matemática Financeira:

- Probabilidades e Estatística, Processos Estocásticos.
- Análise/Cálculo Estocástico.
- Equações Diferenciais (EDPs).
- Optimização e Teoria do Controle.

Técnicas matemáticas mais relevantes em Matemática Financeira:

- Probabilidades e Estatística, Processos Estocásticos.
- Análise/Cálculo Estocástico.
- Equações Diferenciais (EDPs).
- Optimização e Teoria do Controle.

Tempo e Incerteza

- Em Finanças estuda-se o investimento/alocação de recursos (escassos).

  Os resultados das operações financeiras são incertos e têm repercussão no tempo.

- Daqui resulta a necessidade de considerar modelos matemáticos que incorporem uma evolução temporal e que adoptem uma visão probabilística.

Tempo e Incerteza

- Em Finanças estuda-se o investimento/alocação de recursos (escassos).

  Os resultados das operações financeiras são incertos e têm repercussão no tempo.

- Daqui resulta a necessidade de considerar modelos matemáticos que incorporem uma evolução temporal e que adoptem uma visão probabilística.

Descontar

- O dinheiro tem um valor temporal: 1000 euros hoje vale mais do que a expectativa de receber 1000 euros numa data futura.
- Logo, quem empresta tem de receber um prémio (taxa de juro).
- Consideramos que existe apenas uma taxa de juro r sem risco, constante e com capitalização contínua:

$$S_T \;=\; e^{rT} S_0 \quad \text{ou} \quad S_0 \;=\; e^{-rT} S_T .$$

Esta expressão poderia ser deduzida a partir do PVI:

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; rS(t), \qquad S(0) = S_0 .$$

Descontar

- O dinheiro tem um valor temporal: 1000 euros hoje vale mais do que a expectativa de receber 1000 euros numa data futura.
- Logo, quem empresta tem de receber um prémio (taxa de juro).
- Consideramos que existe apenas uma taxa de juro r sem risco, constante e com capitalização contínua:

$$S_T = e^{rT} S_0 \quad \text{ou} \quad S_0 = e^{-rT} S_T.$$

Esta expressão poderia ser deduzida a partir do PVI:

$$\frac{dS}{dt}(t) = rS(t), \qquad S(0) = S_0.$$

Descontar

- O dinheiro tem um valor temporal: 1000 euros hoje vale mais do que a expectativa de receber 1000 euros numa data futura.
- Logo, quem empresta tem de receber um prémio (taxa de juro).
- Consideramos que existe apenas uma taxa de juro r sem risco, constante e com capitalização contínua:

$$S_T \;=\; e^{rT} S_0 \quad \text{ou} \quad S_0 \;=\; e^{-rT} S_T.$$

Esta expressão poderia ser deduzida a partir do PVI:

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; r S(t), \qquad S(0) = S_0.$$

Retorno

- O retorno de um investimento é dado por

$$R \;=\; \log(S_T/S_0) \qquad \Longleftrightarrow S_T \;=\; e^R S_0.$$

  O retorno pode ser negativo (!) ou coincidir com a taxa de juro $T = 1$ (na ausência de risco).

- Quem investe tenta maximizar o seu retorno.

  No entanto, uma relação fundamental em Finanças diz-nos que:

$$\text{Valor Esperado (retorno)} \;=\; \text{Função Crescente (risco)}.$$

Retorno

- O retorno de um investimento é dado por

$$R \;=\; \log(S_T/S_0) \qquad \Longleftrightarrow S_T \;=\; e^R S_0.$$

  O retorno pode ser negativo (!) ou coincidir com a taxa de juro $T = 1$ (na ausência de risco).

- Quem investe tenta maximizar o seu retorno.

  No entanto, uma relação fundamental em Finanças diz-nos que:

  Valor Esperado (retorno) $=$ Função Crescente (risco).

Derivados Financeiros

Definição

Os derivados são instrumentos financeiros, transaccionáveis, cujo preço ou valor depende de outras variáveis (activos subjacentes).

- Existe (implicita ou explicitamente) um elemento de entrega diferida (do activo subjacente).
- São exemplos de activos subjacentes a derivados: acções, índices accionistas, mercadorias, divisas e obrigações.
- São exemplos de derivados: forwards, futuros, opções e swaps.

Derivados Financeiros

Definição

Os derivados são instrumentos financeiros, transaccionáveis, cujo preço ou valor depende de outras variáveis (activos subjacentes).

- Existe (implicita ou explicitamente) um elemento de entrega diferida (do activo subjacente).
- São exemplos de activos subjacentes a derivados: acções, índices accionistas, mercadorias, divisas e obrigações.
- São exemplos de derivados: forwards, futuros, opções e swaps.

Derivados Financeiros

Definição

Os derivados são instrumentos financeiros, transaccionáveis, cujo preço ou valor depende de outras variáveis (activos subjacentes).

- Existe (implicita ou explicitamente) um elemento de entrega diferida (do activo subjacente).
- São exemplos de activos subjacentes a derivados: acções, índices accionistas, mercadorias, divisas e obrigações.
- São exemplos de derivados: forwards, futuros, opções e swaps.

Derivados Financeiros

Definição

Os derivados são instrumentos financeiros, transaccionáveis, cujo preço ou valor depende de outras variáveis (activos subjacentes).

- Existe (implicita ou explicitamente) um elemento de entrega diferida (do activo subjacente).
- São exemplos de activos subjacentes a derivados: acções, índices accionistas, mercadorias, divisas e obrigações.
- São exemplos de derivados: forwards, futuros, opções e swaps.

Razões para Recorrer a Derivados

Há duas estratégias de transacção pré-definidas a actuar nos mercados organizados de derivados:

1. Operações de Cobertura (Hedging): reduzir o risco de potenciais movimentos dos activos (subjacentes).
2. Especulação: permite, com um investimento inicial moderado, tomar uma atitude sobre o mercado.

Razões para Recorrer a Derivados

Há duas estratégias de transacção pré-definidas a actuar nos mercados organizados de derivados:

1. Operações de Cobertura (Hedging): reduzir o risco de potenciais movimentos dos activos (subjacentes).
2. Especulação: permite, com um investimento inicial moderado, tomar uma atitude sobre o mercado.

O que são Contratos de Opções?

Definição

Uma opção call/put europeia é um contrato que dá o direito de comprar/vender uma quantidade específica de um activo subjacente, por um determinado preço, no final de um determinado período de tempo.

- Quem adquire a opção (posição longa) pode exercer, ou não, o seu direito.
- A contraparte no contrato (posição curta) tem a obrigação de vender/comprar o activo se o detentor assim o desejar.

O que são Contratos de Opções?

Definição

Uma opção call/put europeia é um contrato que dá o direito de comprar/vender uma quantidade específica de um activo subjacente, por um determinado preço, no final de um determinado período de tempo.

- Quem adquire a opção (posição longa) pode exercer, ou não, o seu direito.
- A contraparte no contrato (posição curta) tem a obrigação de vender/comprar o activo se o detentor assim o desejar.

O que são Contratos de Opções?

Definição

Uma opção call/put europeia é um contrato que dá o direito de comprar/vender uma quantidade específica de um activo subjacente, por um determinado preço, no final de um determinado período de tempo.

- Quem adquire a opção (posição longa) pode exercer, ou não, o seu direito.
- A contraparte no contrato (posição curta) tem a obrigação de vender/comprar o activo se o detentor assim o desejar.

Terminologia — Opções

- O valor ou preço mencionado no contrato da opção é chamado preço de exercício (strike price).
- A data especificada numa opção para o exercício do direito é conhecida por data de exercício, ou, simplesmente, por maturidade.
- O valor ou preço a pagar pela opção, ou seja, aquilo que a posição longa paga quando o contrato é celebrado, é conhecido por prémio da opção.

Terminologia — Opções

- O valor ou preço mencionado no contrato da opção é chamado preço de exercício (strike price).
- A data especificada numa opção para o exercício do direito é conhecida por data de exercício, ou, simplesmente, por maturidade.
- O valor ou preço a pagar pela opção, ou seja, aquilo que a posição longa paga quando o contrato é celebrado, é conhecido por prémio da opção.

Terminologia — Opções

- O valor ou preço mencionado no contrato da opção é chamado preço de exercício (strike price).
- A data especificada numa opção para o exercício do direito é conhecida por data de exercício, ou, simplesmente, por maturidade.
- O valor ou preço a pagar pela opção, ou seja, aquilo que a posição longa paga quando o contrato é celebrado, é conhecido por prémio da opção.

Exemplo 1

- Considere uma opção call europeia com preço de exercício $E = 15$ e maturidade T. Seja $S_0 = 10$.

  Considere-se dois cenários para o valor de S_T.

  - $S_T = 13$: Neste caso $S_T = 13 \leq E = 15$.

    Quem detém a opção não exerce o direito. Não ganha, mas também não perde.

  - $S_T = 18$: Neste caso $S_T = 18 > E = 15$.

    O direito é exercido e a posição longa compra a acção por $E = 15$, ganhando $18 - 15 = 3$ se a vender imediatamente.

- Ou seja, na maturidade, a opção vale (em posição longa):

$$\max\{18 - 15, 0\} = 3 \quad \text{ou} \quad \max\{13 - 15, 0\} = 0.$$

Exemplo 1

- Considere uma opção call europeia com preço de exercício $E = 15$ e maturidade T. Seja $S_0 = 10$.

  Considere-se dois cenários para o valor de S_T.

  - $S_T = 13$: Neste caso $S_T = 13 \leq E = 15$.

    Quem detém a opção não exerce o direito. Não ganha, mas também não perde.

  - $S_T = 18$: Neste caso $S_T = 18 > E = 15$.

    O direito é exercido e a posição longa compra a acção por $E = 15$, ganhando $18 - 15 = 3$ se a vender imediatamente.

- Ou seja, na maturidade, a opção vale (em posição longa):

$$\max\{18 - 15, 0\} = 3 \quad \text{ou} \quad \max\{13 - 15, 0\} = 0.$$

Exemplo 1

- Considere uma opção call europeia com preço de exercício $E = 15$ e maturidade T. Seja $S_0 = 10$.

  Considere-se dois cenários para o valor de S_T.

  - $S_T = 13$: Neste caso $S_T = 13 \leq E = 15$.

    Quem detém a opção não exerce o direito. Não ganha, mas também não perde.

  - $S_T = 18$: Neste caso $S_T = 18 > E = 15$.

    O direito é exercido e a posição longa compra a acção por $E = 15$, ganhando $18 - 15 = 3$ se a vender imediatamente.

- Ou seja, na maturidade, a opção vale (em posição longa):

$$\max\{18 - 15, 0\} = 3 \quad \text{ou} \quad \max\{13 - 15, 0\} = 0.$$

Exemplo 1

- Considere uma opção call europeia com preço de exercício $E = 15$ e maturidade T. Seja $S_0 = 10$.

  Considere-se dois cenários para o valor de S_T.

  - $S_T = 13$: Neste caso $S_T = 13 \leq E = 15$.

    Quem detém a opção não exerce o direito. Não ganha, mas também não perde.

  - $S_T = 18$: Neste caso $S_T = 18 > E = 15$.

    O direito é exercido e a posição longa compra a acção por $E = 15$, ganhando $18 - 15 = 3$ se a vender imediatamente.

- Ou seja, na maturidade, a opção vale (em posição longa):

$$\max\{18 - 15, 0\} = 3 \quad \text{ou} \quad \max\{13 - 15, 0\} = 0.$$

Ganhos e Perdas — Opções

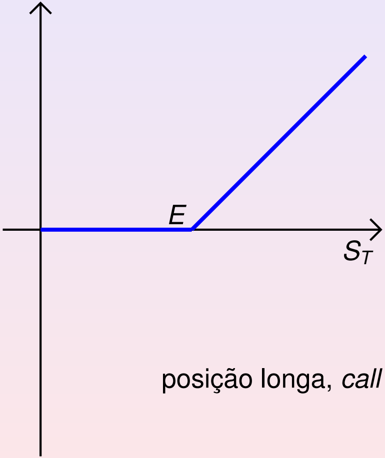
Seja S_T o valor do activo subjacente na maturidade T.

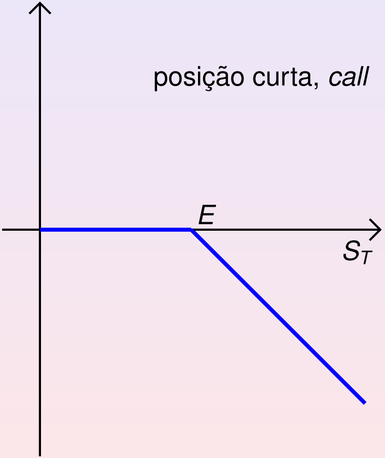
Seja E o preço de exercício.

Os ganhos são dados por:

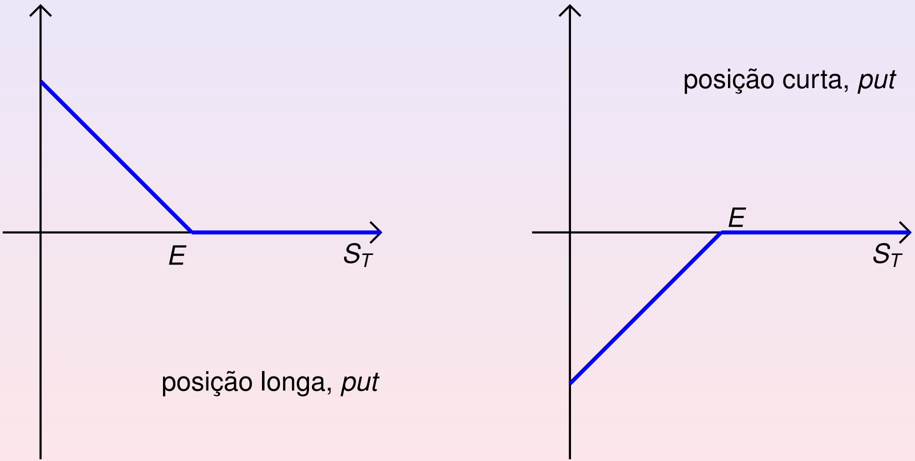
$$\begin{aligned} \max\{S_T - E, 0\} & \quad (\textit{call}\text{ longa}), \\ -\max\{S_T - E, 0\} = \min\{E - S_T, 0\} & \quad (\textit{call}\text{ curta}), \\ \max\{E - S_T, 0\} & \quad (\textit{put}\text{ longa}), \\ -\max\{E - S_T, 0\} = \min\{S_T - E, 0\} & \quad (\textit{put}\text{ curta}). \end{aligned}$$

Perfis de Ganhos e Perdas (Opções Call)





Perfis de Ganhos e Perdas (Opções Put)



Exemplo 2

- Dois instantes temporais $t = 0$ (inicial) e $t = T$ (final).
- Taxa de juro bancária sem risco $r = 0.1$ (10%).
- Uma acção cotada no mercado. Seja $S_0 = 10$.
- Na maturidade, há apenas duas possibilidades:

$$S_T = 22\ (\uparrow) \quad S_T = 5.5\ (\downarrow).$$

- Medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre

$$\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Exemplo 2

- Dois instantes temporais $t = 0$ (inicial) e $t = T$ (final).
- Taxa de juro bancária sem risco $r = 0.1$ (10%).
- Uma acção cotada no mercado. Seja $S_0 = 10$.
- Na maturidade, há apenas duas possibilidades:

$$S_T = 22\ (\uparrow) \quad S_T = 5.5\ (\downarrow).$$

- Medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre

$$\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Exemplo 2

- Dois instantes temporais $t = 0$ (inicial) e $t = T$ (final).
- Taxa de juro bancária sem risco $r = 0.1$ (10%).
- Uma acção cotada no mercado. Seja $S_0 = 10$.
- Na maturidade, há apenas duas possibilidades:

$$S_T = 22\ (\uparrow) \quad S_T = 5.5\ (\downarrow).$$

- Medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre

$$\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Exemplo 2

- Dois instantes temporais $t = 0$ (inicial) e $t = T$ (final).
- Taxa de juro bancária sem risco $r = 0.1$ (10%).
- Uma acção cotada no mercado. Seja $S_0 = 10$.
- Na maturidade, há apenas duas possibilidades:

$$S_T = 22\ (\uparrow) \quad S_T = 5.5\ (\downarrow).$$

- Medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre

$$\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Exemplo 2

- Dois instantes temporais $t = 0$ (inicial) e $t = T$ (final).
- Taxa de juro bancária sem risco $r = 0.1$ (10%).
- Uma acção cotada no mercado. Seja $S_0 = 10$.
- Na maturidade, há apenas duas possibilidades:

$$S_T = 22\ (\uparrow) \quad S_T = 5.5\ (\downarrow).$$

- Medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre

$$\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Exemplo 2

- Uma opção call europeia com $E = 11$ e maturidade T.

  Na maturidade, a opção vale:

  $$\max\{22 - 11, 0\} = 11 \quad \text{ou} \quad \max\{5.5 - 11, 0\} = 0.$$

- Qual é o preço justo a pagar pela opção em $t = 0$?

  Bom,

  $$C_0 = \frac{1}{1 + 0.1}\left(\mathbb{P}(\uparrow) \times 11 + \mathbb{P}(\downarrow) \times 0\right) = 10 \times \mathbb{P}(\uparrow).$$

  Ou seja, é o valor esperado do retorno descontado à taxa de juro.

Exemplo 2

- Uma opção call europeia com $E = 11$ e maturidade T.

  Na maturidade, a opção vale:

$$\max\{22 - 11, 0\} = 11 \quad \text{ou} \quad \max\{5.5 - 11, 0\} = 0.$$

- Qual é o preço justo a pagar pela opção em $t = 0$?

  Bom,

$$C_0 = \frac{1}{1 + 0.1}\big(\mathbb{P}(\uparrow) \times 11 + \mathbb{P}(\downarrow) \times 0\big) = 10 \times \mathbb{P}(\uparrow).$$

  Ou seja, é o valor esperado do retorno descontado à taxa de juro.

Exemplo 2

Como determinar $\mathbb{P}$?

1. Considerar ambos os estados equiprováveis ($\mathbb{P}(\uparrow) = \mathbb{P}(\downarrow) = 0.5$). Nesse caso, vem

$$C_0 = 10 \times \mathbb{P}(\uparrow) = 5.$$

2. Utilizar um argumento de arbitragem.

   Considere-se uma carteira com a seguinte composição: quantidade x_1 de dinheiro no banco e x_2 unidades da acção.

   O seu valor para $t = 0$ é dado por:

$$V_0(x_1, x_2) = x_1 + 10x_2.$$

Exemplo 2

Como determinar $\mathbb{P}$?

1. Considerar ambos os estados equiprováveis ($\mathbb{P}(\uparrow) = \mathbb{P}(\downarrow) = 0.5$). Nesse caso, vem

$$C_0 = 10 \times \mathbb{P}(\uparrow) = 5.$$

2. Utilizar um argumento de arbitragem.

   Considere-se uma carteira com a seguinte composição: quantidade x_1 de dinheiro no banco e x_2 unidades da acção.

   O seu valor para $t = 0$ é dado por:

$$V_0(x_1, x_2) = x_1 + 10x_2.$$

Exemplo 2

- O argumento de arbitragem consiste, primeiro, em garantir que valor da carteira e da opção coincidem na maturidade:

$$
\begin{array}{lrcl}
\uparrow & V_T(x_1, x_2) & = & 1.1x_1 + 22x_2 = 11 \\
\downarrow & V_T(x_1, x_2) & = & 1.1x_1 + 5.5x_2 = 0
\end{array}
$$

- Isto implica uma composição da forma:

$$x_1 = -10/3 \quad \text{(pedir emprestado } 10/3\text{)}$$

e

$$x_2 = 2/3 \quad \text{(comprar } 2/3 \text{ de acções).}$$

Exemplo 2

- O argumento de arbitragem consiste, primeiro, em garantir que valor da carteira e da opção coincidem na maturidade:

$$
\begin{array}{llcccc}
\uparrow & V_T(x_1, x_2) & = & 1.1x_1 + 22x_2 & = & 11 \\
\downarrow & V_T(x_1, x_2) & = & 1.1x_1 + 5.5x_2 & = & 0
\end{array}
$$

- Isto implica uma composição da forma:

$$x_1 = -10/3 \;\; \text{(pedir emprestado } 10/3\text{)}$$

e

$$x_2 = 2/3 \;\; \text{(comprar } 2/3 \text{ de acções).}$$

Exemplo 2

- Ausência de arbitragem significa que o valor da carteira e da opção devem coincidir em $t = 0$:

$$C_0 = V_0(-10/3, 2/3) = -10/3 + 10(2/3) = 10/3.$$

Mas $10/3 \neq 5$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- O problema só pode ter estado na definição de $\mathbb{P}$:

$$S_0 = \frac{1}{1+0.1}(0.5(22) + 0.5(5.5)) = 12.5.$$

De facto, $12.5 \neq 10$. Bingo!!!

Exemplo 2

- Ausência de arbitragem significa que o valor da carteira e da opção devem coincidir em $t = 0$:

$$C_0 = V_0(-10/3, 2/3) = -10/3 + 10(2/3) = 10/3.$$

Mas $10/3 \neq 5$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

- O problema só pode ter estado na definição de $\mathbb{P}$:

$$S_0 = \frac{1}{1+0.1}\big(0.5(22) + 0.5(5.5)\big) = 12.5.$$

De facto, $12.5 \neq 10$. Bingo!!!

Exemplo 2

- Este exemplo reflecte o facto dos investidores serem avessos ao risco (exigindo um prémio de risco r_p):

$$S_0 = 10 = \frac{1}{1 + 0.1 + r_p}\big(0.5(22) + 0.5(5.5)\big).$$

- A alternativa é considerar uma nova medida de probabilidade $\mathbb{Q}$:

$$S_0 = 10 = \frac{1}{1 + 0.1}\big(\mathbb{Q}(\uparrow)(22) + (1 - \mathbb{Q}(\downarrow))(5.5)\big).$$

  O resultado é $\mathbb{Q}(\uparrow) = 1/3$ e, logo, $\mathbb{Q}(\downarrow) = 2/3$.

  Esta medida é neutra face ao risco, no sentido de não exigir um prémio de risco.

Exemplo 2

- Este exemplo reflecte o facto dos investidores serem avessos ao risco (exigindo um prémio de risco r_p):

$$S_0 = 10 = \frac{1}{1 + 0.1 + r_p} \big(0.5(22) + 0.5(5.5)\big).$$

- A alternativa é considerar uma nova medida de probabilidade $\mathbb{Q}$:

$$S_0 = 10 = \frac{1}{1 + 0.1} \big(\mathbb{Q}(\uparrow)(22) + (1 - \mathbb{Q}(\downarrow))(5.5)\big).$$

O resultado é $\mathbb{Q}(\uparrow) = 1/3$ e, logo, $\mathbb{Q}(\downarrow) = 2/3$.

Esta medida é neutra face ao risco, no sentido de não exigir um prémio de risco.

Exemplo 2

- Se agora usarmos $\mathbb{Q}$ vem:

$$C_0 = \frac{1}{1+0.1}\left(\mathbb{Q}(\uparrow) \times 11 + \mathbb{Q}(\downarrow) \times 0\right) = 10 \times \mathbb{Q}(\uparrow) = 10/3.$$

- Esta atribuição respeita o Teorema Fundamental de Atribuição de Preços em Finanças:

Teorema

Não existem oportunidades de arbitragem se e só se existir uma medida neutra face ao risco.

Exemplo 2

- Se agora usarmos $\mathbb{Q}$ vem:

$$C_0 = \frac{1}{1+0.1}(\mathbb{Q}(\uparrow) \times 11 + \mathbb{Q}(\downarrow) \times 0) = 10 \times \mathbb{Q}(\uparrow) = 10/3.$$

- Esta atribuição respeita o Teorema Fundamental de Atribuição de Preços em Finanças:

Teorema

Não existem oportunidades de arbitragem se e só se existir uma medida neutra face ao risco.

Exemplo 2

- Se agora usarmos $\mathbb{Q}$ vem:

$$C_0 = \frac{1}{1+0.1}\left(\mathbb{Q}(\uparrow) \times 11 + \mathbb{Q}(\downarrow) \times 0\right) = 10 \times \mathbb{Q}(\uparrow) = 10/3.$$

- Esta atribuição respeita o Teorema Fundamental de Atribuição de Preços em Finanças:

Teorema

Não existem oportunidades de arbitragem se e só se existir uma medida neutra face ao risco.

Definição

A arbitragem é a possibilidade de fazer lucro sem risco (ou seja, sem a possibilidade de perca).

- A arbitragem ocorre quando existe uma discrepância entre preços de mercados diferentes.
- A prática de arbitragem consiste em tomar uma posição longa no mercado subavaliado e, simultaneamente, uma posição curta no mercado sobreavaliado.
- A arbitragem é um conceito fundamental para a atribuição de preços a derivados financeiros.

Arbitragem

Definição

A arbitragem é a possibilidade de fazer lucro sem risco (ou seja, sem a possibilidade de perca).

- A arbitragem ocorre quando existe uma discrepância entre preços de mercados diferentes.
- A prática de arbitragem consiste em tomar uma posição longa no mercado subavaliado e, simultaneamente, uma posição curta no mercado sobreavaliado.
- A arbitragem é um conceito fundamental para a atribuição de preços a derivados financeiros.

Arbitragem

Definição

A arbitragem é a possibilidade de fazer lucro sem risco (ou seja, sem a possibilidade de perca).

- A arbitragem ocorre quando existe uma discrepância entre preços de mercados diferentes.
- A prática de arbitragem consiste em tomar uma posição longa no mercado subavaliado e, simultaneamente, uma posição curta no mercado sobreavaliado.
- A arbitragem é um conceito fundamental para a atribuição de preços a derivados financeiros.

Arbitragem

Definição

A arbitragem é a possibilidade de fazer lucro sem risco (ou seja, sem a possibilidade de perca).

- A arbitragem ocorre quando existe uma discrepância entre preços de mercados diferentes.
- A prática de arbitragem consiste em tomar uma posição longa no mercado subavaliado e, simultaneamente, uma posição curta no mercado sobreavaliado.
- A arbitragem é um conceito fundamental para a atribuição de preços a derivados financeiros.

Exemplo 1

Suponhamos que $S_0 = 10$ e $E = 15$. Suponhamos que $C_0 = 12$.

Estratégia de arbitragem:

- Entrar longo no activo: Comprar um activo (-10).
- Entrar curto na opção: Subscreve ou vende uma opção ($12 - 10 = 2$).
- Na maturidade:
  - entrega o activo (recebe E!), ou
  - não entrega (e fica com S!).

Exemplo 1

Suponhamos que $S_0 = 10$ e $E = 15$. Suponhamos que $C_0 = 12$.

Estratégia de arbitragem:

- Entrar longo no activo: Comprar um activo (-10).
- Entrar curto na opção: Subscreve ou vende uma opção ($12 - 10 = 2$).
- Na maturidade:
  - entrega o activo (recebe E!), ou
  - não entrega (e fica com S!).

Exemplo 1

Suponhamos que $S_0 = 10$ e $E = 15$. Suponhamos que $C_0 = 12$.

Estratégia de arbitragem:

- Entrar longo no activo: Comprar um activo (-10).
- Entrar curto na opção: Subscreve ou vende uma opção ($12 - 10 = 2$).
- Na maturidade:
  - entrega o activo (recebe E!), ou
  - não entrega (e fica com S!).

Exemplo 1

Suponhamos que $S_0 = 10$ e $E = 15$. Suponhamos que $C_0 = 12$.

Estratégia de arbitragem:

- Entrar longo no activo: Comprar um activo (-10).
- Entrar curto na opção: Subscreve ou vende uma opção ($12 - 10 = 2$).
- Na maturidade:
  - entrega o activo (recebe E!), ou
  - não entrega (e fica com S!).

Exemplo 1

Suponhamos que $S_0 = 10$ e $E = 15$. Suponhamos que $C_0 = 12$.

Estratégia de arbitragem:

- Entrar longo no activo: Comprar um activo (-10).
- Entrar curto na opção: Subscreve ou vende uma opção ($12 - 10 = 2$).
- Na maturidade:
  - entrega o activo (recebe E!), ou
  - não entrega (e fica com S!).

No caso de um investimento sem risco, o retorno (relativo) é determinístico e proporcional ao tempo:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} \;=\; \mu \Delta t.$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; \mu S(t).$$

A solução desta equação, dada a condição inicial $S(t_0) = S_0$, é a seguinte

$$S(t) \;=\; S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Modelação de um Activo Financeiro

No caso de um investimento sem risco, o retorno (relativo) é determinístico e proporcional ao tempo:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \;=\; \mu S(t).$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; \mu S(t).$$

A solução desta equação, dada a condição inicial $S(t_0) = S_0$, é a seguinte

$$S(t) \;=\; S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Modelação de um Activo Financeiro

No caso de um investimento sem risco, o retorno (relativo) é determinístico e proporcional ao tempo:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \; = \; \mu S(t).$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS}{dt}(t) \; = \; \mu S(t).$$

A solução desta equação, dada a condição inicial $S(t_0) = S_0$, é a seguinte

$$S(t) \; = \; S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

No caso de um investimento sem risco, o retorno (relativo) é determinístico e proporcional ao tempo:

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \;=\; \mu S(t).$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; \mu S(t).$$

A solução desta equação, dada a condição inicial $S(t_0) = S_0$, é a seguinte

$$S(t) \;=\; S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Modelação de um Activo Financeiro

O problema de valor inicial

$$\frac{dS}{dt}(t) \;=\; \mu S(t), \quad S(t_0) = S_0$$

pode ser escrito na forma integral

$$S(t) - S_0 \;=\; \int_{t_0}^{t} \mu S(u)\, du.$$

No caso estocástico:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta X(t),$$

em que $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$.

Teorema

O único processo estocástico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ com trajectórias contínuas e incrementos independentes, estacionários e de média nula é o Movimento Browniano.

Logo, assumiremos que

$$\Delta X(t) \sim N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

Modelação de um Activo Financeiro

No caso estocástico:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} \;=\; \mu \Delta t + \sigma \Delta X(t),$$

em que $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$.

Teorema

O único processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ com trajectórias contínuas e incrementos independentes, estacionários e de média nula é o Movimento Browniano.

Logo, assumiremos que

$$\Delta X(t) \;\sim\; N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

Ao somar, membro a membro, a fórmula anterior obtém-se

$$S(t) \;=\; S(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j)\Delta X(t_j).$$

A condição inicial assume-se determinística: $S(t_0) = s_0 \;\in\; \mathbb{R}$.

O limite quando Δt_j tende para zero pode ser representado por

$$S_t \;=\; s_0 + \int_{t_0}^{t} \mu S_t dt + \int_{t_0}^{t} \sigma S_t dX_t \quad \text{(Integral de Itô).}$$

Modelação de um Activo Financeiro

Ao somar, membro a membro, a fórmula anterior obtém-se

$$S(t) \;=\; S(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j)\Delta X(t_j).$$

A condição inicial assume-se determinística: $S(t_0) = s_0 \; \in \; \mathbb{R}$.

O limite quando Δt_j tende para zero pode ser representado por

$$S_t \;=\; s_0 + \int_{t_0}^{t} \mu S_t dt + \int_{t_0}^{t} \sigma S_t dX_t \quad \text{(Integral de Itô).}$$

- A primeira variação é limitada:

$$\int_{t_0}^{t} dt \;=\; \lim_{a_k \longrightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j \;=\; t - t_0,$$

com $a_k = \max_{0 \le j \le k-1} \Delta t_j$.

- A segunda variação é nula ($dt.dt = (dt)^2 = 0$), pois

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 \;\le\; a_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j,$$

o que implica,

$$\lim_{a_k \longrightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 \;=\; 0.$$

- A primeira variação é limitada:

$$\int_{t_0}^{t} dt \;=\; \lim_{a_k \longrightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j \;=\; t - t_0,$$

com $a_k = \max_{0 \leq j \leq k-1} \Delta t_j$.

- A segunda variação é nula ($dt.dt = (dt)^2 = 0$), pois

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 \;\leq\; a_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j,$$

o que implica,

$$\lim_{a_k \longrightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 \;=\; 0.$$

- A segunda variação de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ não é nula:

Teorema

Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano. Então

$$\lim_{a_k \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2\right) - (t - t_0)\right]^2\right) = 0.$$

- Representação algébrica: $dX_t.dX_t = (dX_t)^2 = dt$.

- A segunda variação de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ não é nula:

Teorema

Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano. Então

$$\lim_{a_k \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2\right) - (t - t_0)\right]^2\right) = 0.$$

- Representação algébrica: $dX_t.dX_t = (dX_t)^2 = dt$.

- A segunda variação de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ não é nula:

Teorema

Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *um movimento Browniano. Então*

$$\lim_{a_k \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2\right) - (t - t_0)\right]^2\right) = 0.$$

- Representação algébrica: $dX_t.dX_t = (dX_t)^2 = dt$.

- É possível analisar a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ através da desigualdade

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \;\leq\; A_k \sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j|,$$

em que

$$A_k \;=\; \max_{0\leq j\leq k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow 0.$$

- Assim sendo, tem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow +\infty.$$

- Conclui-se que a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ é ilimitada.

Integração Estocástica

- É possível analisar a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ através da desigualdade

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \;\leq\; A_k \sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j|,$$

em que

$$A_k \;=\; \max_{0\leq j\leq k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow 0.$$

- Assim sendo, tem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow +\infty.$$

- Conclui-se que a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ é ilimitada.

- É possível analisar a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ através da desigualdade

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \;\leq\; A_k \sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j|,$$

em que

$$A_k \;=\; \max_{0\leq j\leq k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow 0.$$

- Assim sendo, tem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j| \longrightarrow +\infty.$$

- Conclui-se que a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ é ilimitada.

Equação Diferencial Estocástica

A equação diferencial estocástica (EDE)

$$S_t - s_0 \;=\; \int_{t_0}^{t} \mu S_t dt + \int_{t_0}^{t} \sigma S_t dX_t$$

escreve-se na forma

$$dS_t \;=\; (\mu S_t) dt + (\sigma S_t) dX_t.$$

Lema de Itô

Teorema

Seja $f(t,S) \in C^2([0,+\infty) \times (0,+\infty))$.

Então $R_t = f(t,S_t)$ *é solução da EDE:*

$$dR_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t,S_t)(dS_t)^2.$$

Valem as regras algébricas

$$(dt)^2 = dt.dX_t = dX_t.dt = 0 \quad \text{e} \quad (dX_t)^2 = dt.$$

Compare-se com

$$df = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{dx}dx.$$

Solução da EDE

Aplicando o Lema de Itô com $f(t, S) = \log(S)$:

Teorema

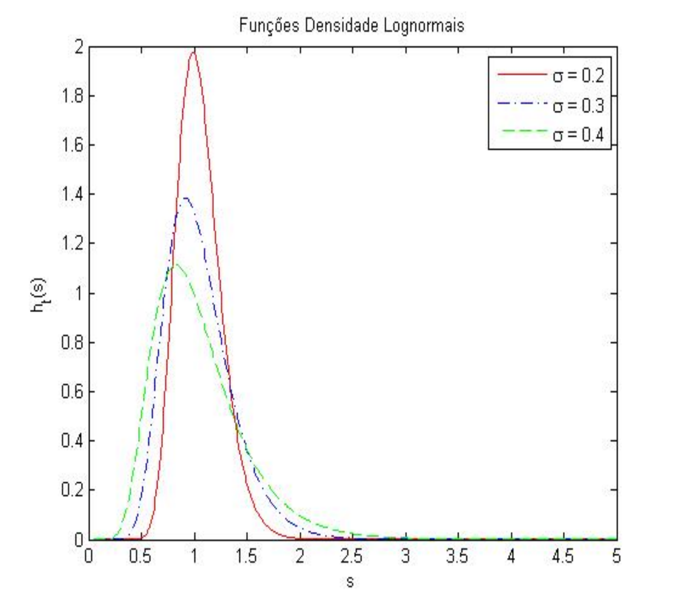
A solução da EDE $dS_t = (\mu S_t)dt + (\sigma S_t)dX_t$ *é dada por*

$$\log(S_t) \sim N(\log(s_0) + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma\sqrt{t}).$$

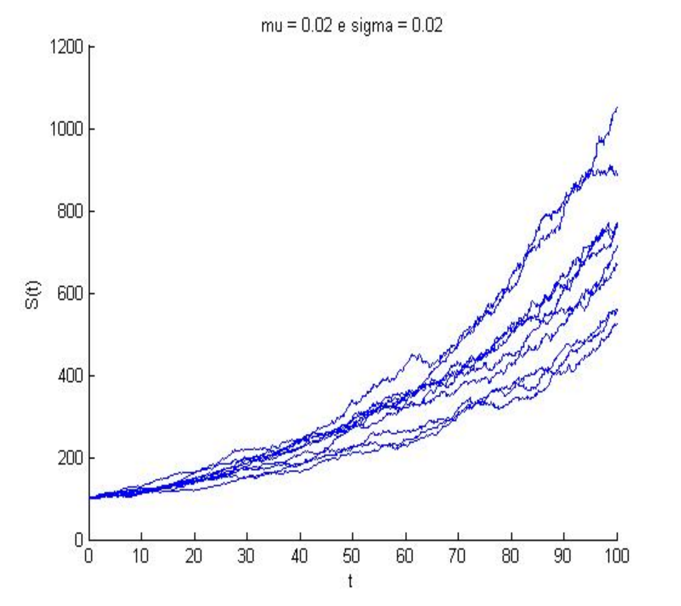
em que $X_{t_0} = 0$ *e* $t_0 = 0$.

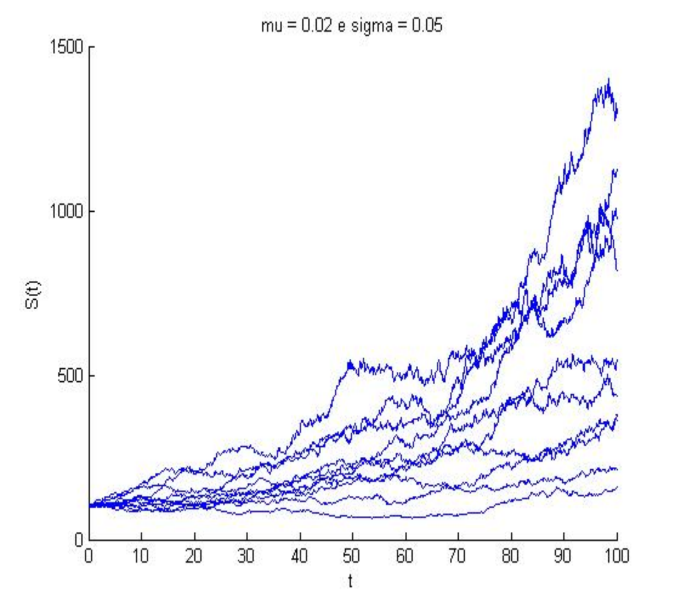
S_t segue uma lei lognormal.

O processo estocástico $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é designado por movimento Browniano geométrico.



Funções Densidade Lognormais
σ = 0.2
σ = 0.3
σ = 0.4
$h_t(s)$
s
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


mu = 0.02 e sigma = 0.02
S(t)
t
0
200
400
600
800
1000
1200
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


mu = 0.02 e sigma = 0.05
S(t)
t
0
500
1000
1500
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Deriva e Volatilidade

- deriva μ:

$$S(t) \text{ determinístico} \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[\Delta S(t))/S(t)] \;=\; \mu \Delta t$$

Indica a taxa de crescimento na ausência de risco.

- Podemos medir μ? NÃO! Não nos importaremos...

- volatilidade σ:

$$S(t) \text{ determinístico} \;\Rightarrow\; \mathbb{V}[\Delta S(t)/S(t)] \;=\; \sigma^2 \Delta t.$$

Quantifica a sensibilidade do activo a eventos aleatórios.

- Podemos estimar a volatilidade σ? Sim...

Deriva e Volatilidade

- deriva μ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{E}[\Delta S(t))/S(t)] = \mu \Delta t$$

  Indica a taxa de crescimento na ausência de risco.

- Podemos medir μ? NÃO! Não nos importaremos...

- volatilidade σ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{V}[\Delta S(t)/S(t)] = \sigma^2 \Delta t.$$

  Quantifica a sensibilidade do activo a eventos aleatórios.

- Podemos estimar a volatilidade σ? Sim...

Deriva e Volatilidade

- deriva μ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{E}[\Delta S(t))/S(t)] = \mu \Delta t$$

  Indica a taxa de crescimento na ausência de risco.

- Podemos medir μ? NÃO! Não nos importaremos...

- volatilidade σ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{V}[\Delta S(t)/S(t)] = \sigma^2 \Delta t.$$

  Quantifica a sensibilidade do activo a eventos aleatórios.

- Podemos estimar a volatilidade σ? Sim...

Deriva e Volatilidade

- deriva μ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{E}[\Delta S(t))/S(t)] = \mu \Delta t$$

  Indica a taxa de crescimento na ausência de risco.

- Podemos medir μ? NÃO! Não nos importaremos...

- volatilidade σ:

$$S(t) \text{ determinístico } \Rightarrow \mathbb{V}[\Delta S(t)/S(t)] = \sigma^2 \Delta t.$$

  Quantifica a sensibilidade do activo a eventos aleatórios.

- Podemos estimar a volatilidade σ? Sim...

Hipóteses do modelo de Black-Scholes:

- Activo subjacente segue uma lognormal (e não paga dividendos).
- Ausência de arbitragem (ou existência de neutralidade face ao risco).
- Ausência de custos de transacção.
- Continuidade e divisibilidade.

Hipóteses do modelo de Black-Scholes:

- Activo subjacente segue uma lognormal (e não paga dividendos).
- Ausência de arbitragem (ou existência de neutralidade face ao risco).
- Ausência de custos de transacção.
- Continuidade e divisibilidade.

Hipóteses do modelo de Black-Scholes:

- Activo subjacente segue uma lognormal (e não paga dividendos).
- Ausência de arbitragem (ou existência de neutralidade face ao risco).
- Ausência de custos de transacção.
- Continuidade e divisibilidade.

Hipóteses do modelo de Black-Scholes:

- Activo subjacente segue uma lognormal (e não paga dividendos).
- Ausência de arbitragem (ou existência de neutralidade face ao risco).
- Ausência de custos de transacção.
- Continuidade e divisibilidade.

Fórmula de Black-Scholes: Risco Neutral

- Neutralidade face ao risco: activo subjacente segue uma lognormal, mas com

$$\mu \longleftrightarrow r \qquad (\mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{Q}, \text{ no exemplo anterior}).$$

- Desta forma toma-se

$$C(t, S) \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_r(\max\{S_T - E\}, 0) \;=\; \text{Fórmula de BS.}$$

- Suporte matemático: versão do Teorema de Girsanov (prova-se que uma substituição de medida altera apenas o coeficiente de dt).

Fórmula de Black-Scholes: Risco Neutral

- Neutralidade face ao risco: activo subjacente segue uma lognormal, mas com

$$\mu \longleftrightarrow r \qquad (\mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{Q}, \text{ no exemplo anterior}).$$

- Desta forma toma-se

$$C(t, S) \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_r(\max\{S_T - E\}, 0) \;=\; \text{Fórmula de BS.}$$

- Suporte matemático: versão do Teorema de Girsanov (prova-se que uma substituição de medida altera apenas o coeficiente de dt).

Fórmula de Black-Scholes: Risco Neutral

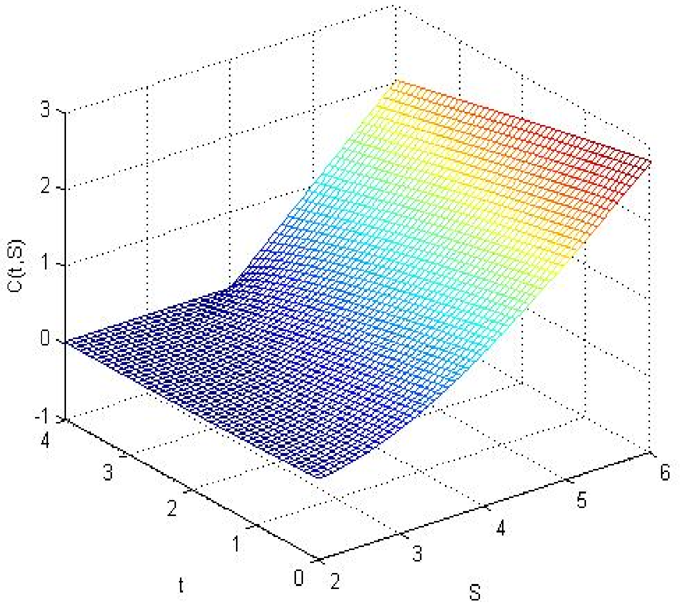
- Neutralidade face ao risco: activo subjacente segue uma lognormal, mas com

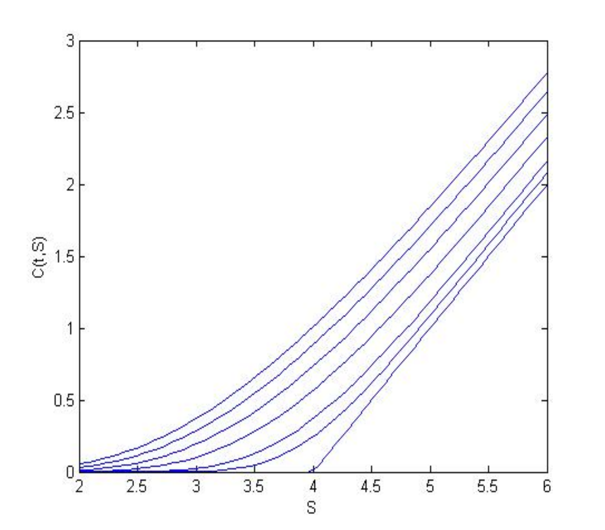
$$\mu \longleftrightarrow r \qquad (\mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{Q}, \text{ no exemplo anterior}).$$

- Desta forma toma-se

$$C(t, S) \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_r(\max\{S_T - E\}, 0) \;=\; \text{Fórmula de BS.}$$

- Suporte matemático: versão do Teorema de Girsanov (prova-se que uma substituição de medida altera apenas o coeficiente de dt).


C(t,S)
3
2
1
0
-1
4
3
2
1
0
t
2
3
4
5
6
S



C(t,S)
S
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

Fórmula de Black-Scholes

$$C(t,S) \;=\; S \times N(d_+) - e^{-r(T-t)} E \times N(d_-), \qquad S > 0,\; t \in [0,T)$$

em que

$$d_\pm \;=\; \frac{\log(S/E) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

N é a distribuição de uma lei normal de média 0 e desvio padrão 1:

$$N(d) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}s^2}\, ds.$$

Equação de Black-Scholes: Arbitragem

Roteiro:

1. Considera-se um carteira: $\Pi(t, S) = \Delta \times S - C(t, S)$.
2. Aplica-se o Lema de Itô a Π...
3. Depois, faz-se

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \qquad \text{(hedging...)},$$

eliminando-se a componente em dX_t.

4. Combina-se a EDP resultante com

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) \ = \ r\,\Pi(t, S).$$

Equação de Black-Scholes: Arbitragem

Roteiro:

1. Considera-se um carteira: $\Pi(t, S) = \Delta \times S - C(t, S)$.
2. Aplica-se o Lema de Itô a Π...
3. Depois, faz-se

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \qquad \text{(hedging...)},$$

eliminando-se a componente em dX_t.

4. Combina-se a EDP resultante com

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = r\,\Pi(t, S).$$

Equação de Black-Scholes: Arbitragem

Roteiro:

1. Considera-se um carteira: $\Pi(t, S) = \Delta \times S - C(t, S)$.
2. Aplica-se o Lema de Itô a Π...
3. Depois, faz-se

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \qquad \text{(hedging...)},$$

eliminando-se a componente em dX_t.

4. Combina-se a EDP resultante com

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = r\,\Pi(t, S).$$

Equação de Black-Scholes: Arbitragem

Roteiro:

1. Considera-se um carteira: $\Pi(t, S) = \Delta \times S - C(t, S)$.
2. Aplica-se o Lema de Itô a Π...
3. Depois, faz-se

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \qquad \text{(hedging...)},$$

eliminando-se a componente em dX_t.

4. Combina-se a EDP resultante com

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) \;=\; r\,\Pi(t, S).$$

Equação de Black-Scholes

- Resulta deste roteiro:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S) + rS\frac{\partial V}{\partial S}(t,S) - rC(t,S) \;=\; 0.$$

- A equação de Black-Scholes é uma EDP de segunda ordem, linear e parabólica.
- Com a condição final, $C(T,S) \;=\; \max\{S-E\},0)$, a sua solução é dada pela Fórmula de Black-Scholes.

Equação de Black-Scholes

- Resulta deste roteiro:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S) + rS\frac{\partial V}{\partial S}(t,S) - rC(t,S) \;=\; 0.$$

- A equação de Black-Scholes é uma EDP de segunda ordem, linear e parabólica.

- Com a condição final, $C(T,S) \;=\; \max\{S-E\},0)$, a sua solução é dada pela Fórmula de Black-Scholes.

Equação de Black-Scholes

- Resulta deste roteiro:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S) + rS\frac{\partial V}{\partial S}(t,S) - rC(t,S) \ = \ 0.$$

- A equação de Black-Scholes é uma EDP de segunda ordem, linear e parabólica.
- Com a condição final, $C(T,S) \ = \ \max\{S-E\},0)$, a sua solução é dada pela Fórmula de Black-Scholes.

- Bachelier (1900): teoria do movimento Browniano e sua aplicação na modelação de um activo.
- Black-Scholes-Merton (1973): fórmula para o preço de opções europeias.
- Scholes e Merton recebem o Nobel da Economia em 1997 ("for a new method to determine the value of derivatives").

- Markowitz (1952): teoria da selecção de carteiras.
- Markowitz e Sharpe recebem o Nobel da Economia em 1990 ("for their pioneering work in the theory of financial economics").

Notas Históricas

- Bachelier (1900): teoria do movimento Browniano e sua aplicação na modelação de um activo.
- Black-Scholes-Merton (1973): fórmula para o preço de opções europeias.
- Scholes e Merton recebem o Nobel da Economia em 1997 (“for a new method to determine the value of derivatives”).

- Markowitz (1952): teoria da selecção de carteiras.
- Markowitz e Sharpe recebem o Nobel da Economia em 1990 (“for their pioneering work in the theory of financial economics”).

Notas Históricas

- Bachelier (1900): teoria do movimento Browniano e sua aplicação na modelação de um activo.
- Black-Scholes-Merton (1973): fórmula para o preço de opções europeias.
- Scholes e Merton recebem o Nobel da Economia em 1997 ("for a new method to determine the value of derivatives").

- Markowitz (1952): teoria da selecção de carteiras.
- Markowitz e Sharpe recebem o Nobel da Economia em 1990 ("for their pioneering work in the theory of financial economics").

Notas Históricas

- Bachelier (1900): teoria do movimento Browniano e sua aplicação na modelação de um activo.
- Black-Scholes-Merton (1973): fórmula para o preço de opções europeias.
- Scholes e Merton recebem o Nobel da Economia em 1997 (“for a new method to determine the value of derivatives”).

- Markowitz (1952): teoria da selecção de carteiras.
- Markowitz e Sharpe recebem o Nobel da Economia em 1990 (“for their pioneering work in the theory of financial economics”).

Notas Históricas

- Bachelier (1900): teoria do movimento Browniano e sua aplicação na modelação de um activo.
- Black-Scholes-Merton (1973): fórmula para o preço de opções europeias.
- Scholes e Merton recebem o Nobel da Economia em 1997 (“for a new method to determine the value of derivatives”).

- Markowitz (1952): teoria da selecção de carteiras.
- Markowitz e Sharpe recebem o Nobel da Economia em 1990 (“for their pioneering work in the theory of financial economics”).

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

Mais Matemática Financeira

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

Mais Matemática Financeira

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

Mais Matemática Financeira

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

Mais Matemática Financeira

- Outras noções (muito) básicas: volatilidade implícitas, sorrisos da volatilidade, paridade put-call.
- Outros tipos de opções: Americanas, Exóticas, Dependentes da Trajectória do Activo, Reais...
- Modelos estocásticos para a volatidade.
- Modelos estocásticos para a evolução das taxas de juro (estrutura temporal).
- Modelação de derivados sobre carteiras de créditos.
- Optimização em selecção de carteiras.

- Processos Estocásticos: Martingalas (estratégias de hedging). Análise de séries temporais.
- Componente Computacional: Métodos numéricos para integração de EDPs. Métodos em reticulado (binomiais). Simulação de Monte-Carlo.

Mais Matemática Financeira

- Processos Estocásticos: Martingalas (estratégias de hedging). Análise de séries temporais.
- Componente Computacional: Métodos numéricos para integração de EDPs. Métodos em reticulado (binomiais). Simulação de Monte-Carlo.

Fim!